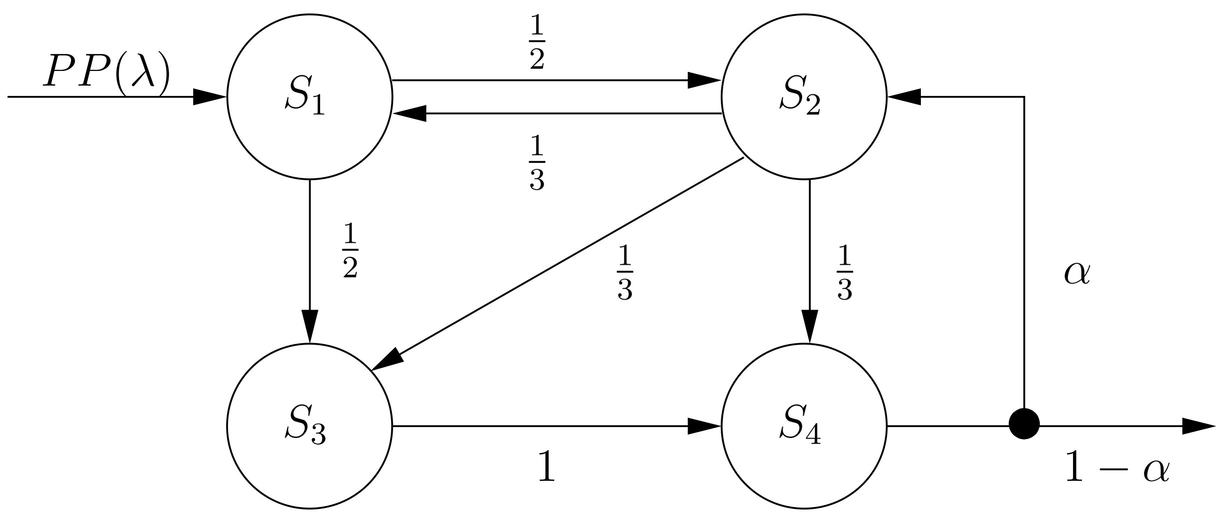
Zusatzübung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

03.03.2010, 16 Uhr, Seminarraum TI, WSH 24 A 407

Aufgabe 1. Anforderungen, die gemäß einem Poisson-Prozess mit Ankunftsrate $\lambda > 0$ an einem Server-Cluster ankommen, werden zunächst Server S_1 zugeteilt und dort bedient. Nach der Bearbeitung an Server S_1 wird das Ergebnis jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an Server S_2 bzw. S_3 weitergeleitet. Bei Server S_2 wird eine Anforderung nach ihrer Bearbeitung jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zu einem der Server S_1, S_3 oder S_4 geschickt. Server S_3 übergibt die Ergebnisse nach ihrer Berechnung an Server S_4, der schließlich die bearbeiteten Anforderungen mit Wahrscheinlichkeit α, $0 \leq \alpha < 1$, an Server S_2 zurück gibt bzw. mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ die Verarbeitung abschließt. Die Server S_1, S_2 und S_3 werden durch $M/M/1$-Systeme und der Server S_4 als $M/M/\infty$-System modelliert. Die Anforderungen werden mit $\mathrm{Exp}(\mu_i)$-verteilter Bedienzeit bearbeitet, $i = 1, \dots, 4$. Alle Server arbeiten stochastisch unabhängig. Das System wird durch das folgende Warteschlangennetz beschrieben.



(a) Geben Sie ein Modell mit Zustandsraum und Routingmatrix an.

(b) Wann existiert eine stationäre Verteilung und wie lautet diese?

Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = 0$ und $\alpha = 1$ gelte. Ferner seien $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$ und $\mu_4 = 5$. Es befinden sich M Anforderungen im System.

(c) Bestimmen Sie den Zustandsraum des geschlossenen Jacksonnetzes und seine Mächtigkeit.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Flussgleichung, für die $\Lambda_1^* = 2$ gilt.

(e) Wie lautet für $M = 3$ die stationäre Verteilung?

Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\mu_1 = \mu_3 = 4$ und $\mu_2 = 3\,\mu_4 = 9$ gelte. Sei nun Server S_3 ein M/M/1/3-System. Damit liegt kein Jacksonnetz mehr vor. Um eine approximative stationäre Verteilung zu erhalten, wird der Zustandsraum S in

$$S_{\text{nb}} = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_1, n_2, n_4 \in \mathbb{N}_0, n_3 \leq 3\}$$

(nicht-blockierender Fall) und

$$S_{\text{b}} = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n_1, n_2, n_4 \in \mathbb{N}_0, n_3 = 4\}$$

(blockierender Fall) disjunkt partitioniert, also $S = S_{\text{nb}} \cup S_{\text{b}}$. Als Approximation für die stationäre Verteilung wird

$$p^*(\mathbf{n}) = \begin{cases} \beta\, p^*_{\text{nb}}(\mathbf{n}) & \text{, falls } \mathbf{n} \in S_{\text{nb}} \\ (1-\beta)\, p^*_{\text{b}}(\mathbf{n}) & \text{, falls } \mathbf{n} \in S_{\text{b}} \end{cases}$$

für $\mathbf{n} \in S$ gewählt. Hierbei ist β ist die Wahrscheinlichkeit für den nicht-blockierenden Fall unter der stationären Verteilung aus (b). Für den nicht-blockierenden Fall werde das System im Gleichgewicht durch die Verteilung $p^*_{\text{nb}}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in S_{\text{nb}}$, beschrieben, die aus der stationären Verteilung unter (b) entsteht, indem man den Zustandsraum auf S_{nb} einschränkt. Für den blockierenden Fall wird Server S_3 als Außenwelt betrachtet, somit kommen insbesondere an Server S_4 Anforderungen gemäß einem Poisson-Prozess mit Ankunftsrate μ_3 an. Die zugehörige stationäre Verteilung sei $p^*_{\text{O}}(n_1, n_2, n_4)$. Die Verteilung $p^*_{\text{b}}(\mathbf{n})$ entsteht aus $p^*_{\text{O}}(n_1, n_2, n_4)$ durch

$$p^*_{\text{b}}(n_1, n_2, 4, n_4) = p^*_{\text{O}}(n_1, n_2, n_4).$$

(f) Wie lautet die Verteilung p^*_{nb} im nicht-blockierenden Fall?

(g) Modellieren Sie den blockierenden Fall als offenes Jacksonnetz. Geben Sie den Zustandsraum, die Routingmatrix und die stationäre Verteilung p^*_{O} an.

(h) Berechnen Sie den Wert von β.

Aufgabe 2. In einer Postfiliale kommen Kunden gemäß einem Poisson-Prozess mit der Rate 30 Kunden pro Stunde an. Ein Drittel aller Kunden möchte Geld vom Sparkonto abheben. Die Bearbeitungszeit dieser Kunden sei exponentialverteilt und dauere erwartungsgemäß 3 Minuten. Die restlichen Kunden möchten gerne Briefmarken kaufen, ihre Bearbeitungszeit sei ebenfalls exponentialverteilt und dauere im Mittel 1 Minute. In der Postfiliale gebe es nur einen Schalter aber dafür beliebig viele Warteplätze, Kunden werden in der Reihenfolge ihrer Ankunft bedient.

(a) Durch welches Bediensystem lässt sich die obige Situation modellieren und wie lautet die Verteilungsfunktion der Bedienzeit?

(b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Kunden in der Postfiliale und die erwartete Gesamtverweilzeit eines Kunden im stationären Zustand.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist im stationären Zustand die Postfiliale leer?

(d) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Wartezeit im stationären Zustand.

(e) Berechnen Sie mit dem Resultat aus (d) den Erwartungswert der Wartezeit im stationären Zustand.

(f) Nehmen Sie nun an, dass durch Bauarbeiten in der Postfiliale nur für insgesamt drei Kunden Platz ist, d.h., dass maximal zwei Kunden in der Warteschlange warten können. Kunden, die nicht mehr in die Filiale passen, gehen wieder nach Hause. Durch welches Bediensystem lässt sich diese Situation modellieren? Geben Sie einen geeigneten Markoff-Prozess mit Zustandsraum und Intensitätsgraph an.