

7. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz
6.6.2011

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, d.h. dass für eine $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable X und für beliebige $s, t \geq 0$ gilt

$$P(X \leq s + t | X > t) = P(X \leq s) = 1 - e^{-\lambda s}.$$

Anschaulich bedeutet dies: Ist bei einer exponentialverteilten Wartezeit X die Zeit t bereits verstrichen, so ist die Restwartezeit genauso verteilt wie X selbst.

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wartezeit W_Q^* in der Warteschlange eines $M/M/1$ -Systems mit Ankunftsintensität λ und Bedienintensität μ durch die Verteilungsfunktion

$$P(W_Q^* \leq z) = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)z}$$

beschrieben wird, wobei $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ die Auslastung des Systems ist.

a) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert und die Varianz von W_Q^* als

$$E(W_Q^*) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

und

$$\text{Var}(W_Q^*) = \frac{2\rho - \rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

ergeben.

b) Ferner wurde gezeigt, dass sich die Verteilungsfunktion der Antwortzeit W^* als

$$P(W^* \leq z) = \int_0^z P(W_Q^* \leq z - y) \mu e^{-\mu y} dy$$

ausdrücken lässt. Verifizieren Sie, dass sich daraus

$$P(W^* \leq z) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)z}$$

ergibt.

Aufgabe 3. Ein kleines Telekommunikationsunternehmen betreibt eine Hotline mit genau einem Mitarbeiter, die Warteschlangenkapazität kann als unendlich angenommen werden. Erfahrungswerte zeigen, dass der Hotline-Mitarbeiter durchschnittlich zehn Minuten braucht, um einem Kunden bei der Lösung seines Problems zu helfen. Ferner weiss man, dass ein Kunde im Durchschnitt alle zwei Wochen wegen eines Problems anruft.

- a) Die Zufriedenheitsgarantie des Unternehmens garantiert den Kunden, dass die Antwortzeit bis zur Lösung ihres Problems im Mittel maximal 15 Minuten beträgt. Wieviele Kunden darf das Unternehmen maximal haben, wenn es dieses Versprechen einhalten will? Modellieren Sie die Hotline zur Lösung dieser Frage als $M/M/1/\infty$ -System.
- b) Die Geschäftsführung erwägt, die Zufriedenheitsgarantie zu erweitern. Zusätzlich soll den Kunden garantiert werden, dass die Antwortzeit in 90% aller Fälle nicht mehr als 30 Minuten beträgt. Ist diese Erweiterung sinnvoll, wenn das Unternehmen zu diesem Zeitpunkt 504 Kunden hat?