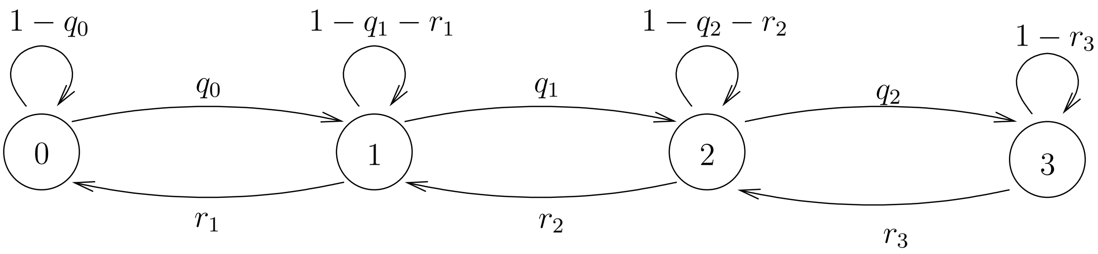
Zusatzübung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

27.2.2013

Aufgabe 1. Betrachten Sie die durch folgenden Übergangsgraphen dargestellte Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $0 \leq q_i, r_j \leq 1$, $q_1 + r_1 \leq 1$ und $q_2 + r_2 \leq 1$.



- **a)** Geben Sie den Zustandsraum S und die Übergangsmatrix Π der Markov-Kette an.
- **b)** Geben Sie Bedingungen für die Parameter an, so dass die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist.

Die Markov-Kette sei im Folgenden irreduzibel.

- **c)** Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.
- **d)** Geben Sie für $q_0 = q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ die Übergangsmatrix Π an und bestimmen Sie sowohl
  - **i)** alle Anfangsverteilungen $\mathbf{p}(0)$, so dass $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, als auch
  - **ii)** alle Anfangsverteilungen $\mathbf{p}(0)$, so dass $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir stellen uns nun vor, dass zwischen den Schritten der Markov-Kette zufällige, stochastisch unabhängige, identisch exponentialverteilte Zeiten verstreichen. Für jeden Zustand $i \in S$ sei die Anzahl der Schritte N_i, die bis zum Verlassen des Zustandes vergehen, geometrisch verteilt mit Parameter γ_i.

e) Bestimmen Sie die Parameter γ_i.

f) Bestimmen Sie die Verteilung der Verweilzeit im Zustand $i \in S$, nämlich

$$T_i = \sum_{k=1}^{N_i} S_k,$$

wobei $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen, identisch exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ ist. Bestimmen Sie zunächst die Verteilung von

$$Y_m = \sum_{k=1}^{m} S_k,$$

für festes $m \in \mathbb{N}$.

g) Geben Sie für alle Zustände die erwartete Aufenthaltsdauer $E(T_i)$ an.

Das obige System soll als Markov-Prozess modelliert werden. Konstruieren Sie dazu einen Markov-Prozess mit Zustandsraum S und stochastisch unabhängigen Verweilzeiten. Es bezeichne $1/\alpha_i$ die erwartete Verweilzeit im Zustand i. Die eingebettete Markov-Kette dieses Prozesses soll die Übergangswahrscheinlichkeiten

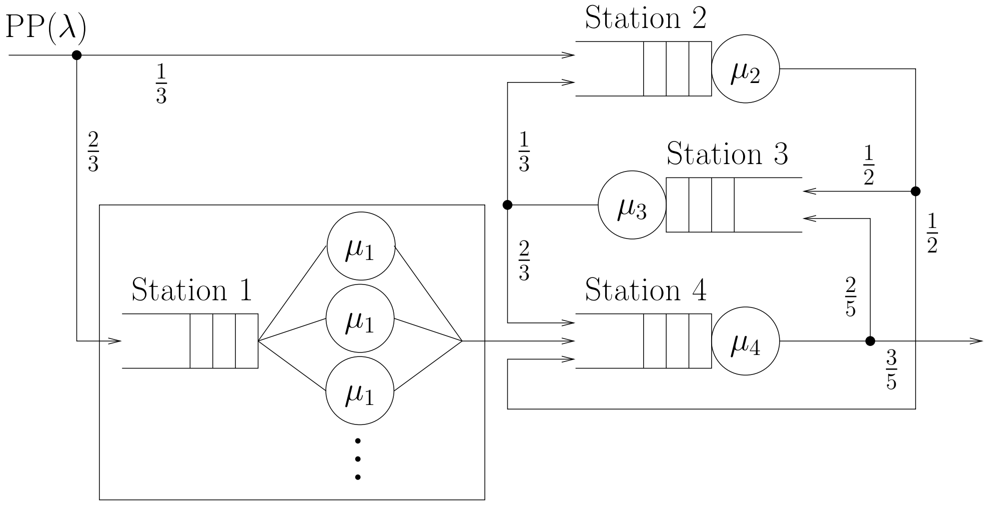
$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{q_i}{q_i+r_i} & \text{für } j = i+1, \\ \frac{r_i}{q_i+r_i} & \text{für } j = i-1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

haben, wobei $r_0 = q_3 = 0$ gelte.

h) Geben Sie den Intensitätsgraphen des Markov-Prozesses unter Benutzung von α_i und $p_{i,j}$ an.

i) Berechnen Sie die stationäre Verteilung des Markov-Prozesses für $\alpha_i = i + 1$ und $q_0 = q_1 = q_2 = r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 2. Gegeben sei folgendes Warteschlangennetz mit $J = 4$ Stationen:



Station 1 ist ein $M/M/\infty$-System mit Bedienrate $\mu_1 = 1$, die anderen drei Stationen sind $M/M/1/\infty$-Systeme mit den Bedienraten $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 6$ und $\mu_4 = 10$. Der Ankunftsprozess ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda = 3$, die Routingparameter sind in der Skizze angegeben. Offenbar kann dieses Warteschlangennetz als Jackson-Netz modelliert werden.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.

b) Lösen Sie die Flussgleichungen.

c) Verifizieren Sie, dass eine stationäre Verteilung existiert, und bestimmen Sie diese.

d) Wie groß ist die Auslastung der vier Stationen, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der jeweiligen Station mindestens eine Anforderung befindet?

Das Warteschlangennetz wird jetzt zu einem geschlossenen Jackson-Netz mit 3 Stationen modifiziert. Die Flüsse aus der Außenwelt in das Netz und der Fluss aus Station 4 in die Außenwelt fallen weg, es ist jetzt also $r_{43} = 1$. Es befinden sich $M = 5$ Anforderungen im Netz.

e) Begründen Sie, warum Station 1 für den stationären Zustand des Systems keine Rolle spielt und deswegen nicht modelliert wird?

f) Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz analog zur obigen Skizze.

g) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des geschlossenen Netzes an. Wie groß ist der Zustandsraum?

h) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Flussgleichungen, bei der $\Lambda_3 = 6$ ist.

i) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

j) Berechnen Sie die jeweilige Auslastung der Stationen.