5. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Dr. Michael Reyer, Dipl.-Inform. Florian Schröder

27.5.2013

Aufgabe 1. Ein Puffer besitze eine maximale Kapazität von r Paketen. Zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$ komme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0,1]$ ein neues Paket an. Falls der Puffer noch freie Kapazität aufweist, wird das Paket angenommen, ansonsten wird es abgewiesen. Nach der Ankunft werde noch zum selben Zeitpunkt mit Wahrscheinlicheit $\beta \in [0,1]$ ein bereits im Puffer befindliches Paket weitergeschickt. Das Ankommen neuer und das Verschicken bereits im Puffer befindlicher Pakete sei stochastisch unabhängig. Es sei X_n die Anzahl der Pakete im Puffer zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ nach zufälligem Zu- und Abgang, $X_0 = s \leq r$.

a) Geben Sie Zustandsraum, Übergangsgraph und Übergangsmatrix der Markov-Kette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ an.

b) Wie lauten die globalen Gleichgewichtsgleichungen?

Seien nun $r = 3$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Nehmen Sie nun an, dass zunächst der Abgang und dann der Zugang von Paketen bearbeitet wird.

d) Wird die mittlere Anzahl an Paketen im System steigen, sinken oder gleich bleiben?

e) Rechnen Sie die mittlere Anzahl an Paketen für beide Bearbeitungsreihenfolgen aus.

Aufgabe 2. Das Herz der Suchmaschine Google ist *Page Rank*, ein Algorithmus zur Beurteilung von Webseiten, der allen Webseiten im Internet ein Gewicht zuweist, welches zur Sortierung der Suchergebnisse verwendet wird. Dem Algorithmus liegt folgendes Modell eines Nutzers zu Grunde, der von einer beliebigen Seite aus zufällig durch das Web surft:

- Mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ (Google wählt $p = 0.85$) folgt der Nutzer einem Link auf der aktuellen Seite. Wenn mehrere Links zu verschiedenen Seiten vorhanden sind, so wird einer von diesen zufällig gemäß einer Gleichverteilung ausgewählt.
- Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ springt der Nutzer zu einer Seite, welche zufällig gemäß einer Gleichverteilung aus allen existierenden Webseiten ausgewählt wird.

Surfen durch ein Web mit N Webseiten kann als Markov-Kette modelliert werden, wobei sich die Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem oben beschriebenen Verfahren ergeben. Ist $\boldsymbol{p}^*$ die stationäre Verteilung dieser Markov-Kette, dann ist das Gewicht einer Seite $i \in \{1, ..., N\}$ durch p_i^* gegeben. Die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ sei die Adjazenzmatrix eines Graphen, der das Web beschreibt, d.h., $a_{ij} = 1$ bedeutet, es existiert ein Link von Seite i zu Seite j. Entsprechend bedeutet $a_{ij} = 0$, dass es keinen Link von i nach j gibt. Geben Sie für ein Web aus 4 Webseiten mit der Adjazenzmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix der zugehörigen Markov-Kette für $p = \frac{3}{4}$ an und berechnen Sie die Seitengewichte gemäß Page Rank.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbf{\Pi}(t)$ die Übergangsmatrix eines homogenen Markov-Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$mit Zustandsraum $\mathcal{S}$, d.h. es ist

$$P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = (\mathbf{\Pi}(t))_{ij}$$

für alle $s, t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{S}$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \geq 0$ die Verteilung $\boldsymbol{p}(t)$ von X_t als

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{\Pi}(t)$$

aus der Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0)$ von X_0 berechnet werden kann.

b) Zeigen Sie für $r, t \geq 0$ die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* für Markov-Prozesse

$$\mathbf{\Pi}(r + t) = \mathbf{\Pi}(r) \cdot \mathbf{\Pi}(t).$$