

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Christopher Schnellling

## Übung 13

Montag, 18. Juli 2016

**Aufgabe 1.** Ein stark belasteter Streckenabschnitt wird von verschiedenen Zugarten befahren, und zwar von S-Bahnen ( $S$ ) und Güterzügen ( $G$ ). Die Zugarten aufeinanderfolgender Züge seien stochastisch unabhängig. Bei einem eintreffenden Zug handelt es sich mit der Wahrscheinlichkeit von  $P(S) = 0.6$  um eine S-Bahn und mit Gegenwahrscheinlichkeit  $P(G) = 0.4$  um einen Güterzug. Der Streckenabschnitt kann zu jedem Zeitpunkt maximal von einem Zug genutzt werden. Güterzüge geben den Streckenabschnitt jeweils nach drei Minuten wieder frei. S-Bahnen halten in dem Abschnitt an einem Haltepunkt, so dass die Belegungszeit  $Y$  des Streckenabschnitts je nach Fahrgastaufkommen zwischen drei und fünf Minuten variiert. Die bedingten Verteilungsfunktionen der Belegungszeit lauten

$$F_{Y|S}(y) = P(Y \leq y | S) = \begin{cases} 0 & y < 3, \\ \frac{y-3}{2} & 3 \leq y < 5, \\ 1 & y \geq 5, \end{cases}$$

$$F_{Y|G}(y) = P(Y \leq y | G) = \begin{cases} 0 & y < 3, \\ 1 & y \geq 3. \end{cases}$$

Es treffen im Mittel zehn Züge pro Stunde ein, die den Streckenabschnitt nutzen wollen. Der Ankunftsprozess wird daher als Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda = \frac{1}{6}$  modelliert. Die Warteschlangenkapazität kann als unendlich angenommen werden, da sich die wartenden Züge auf den Zulaufstrecken beliebig weit zurückstauen können. Die Züge fahren in den Streckenabschnitt in der Reihenfolge ein, in der sie eingetroffen sind. Der betrachtete Streckenabschnitt kann daher als  $M/G/1/\infty$ -FIFO-Bediensystem modelliert werden.

- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Bedienzeit (Belegungszeit)  $Y$  und daraus die Bedienrate. Wie groß ist die Auslastung des Systems? Existiert eine stationäre Verteilung?
- Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Anforderungen im System.
- Geben Sie die Laplace-Transformierte  $L_Y(s)$  der Bedienzeit  $Y$  an.  
**Hinweis:** In der Vorlesung wurde die Laplace-Transformierte zwar nur für absolutstetige Zufallsvariablen definiert, die Definition  $L_Y(s) = E(e^{-sY})$  kann aber auf beliebige Zufallsvariablen angewendet werden, deren Träger keine negativen Zahlen enthält.
- Charakterisieren Sie die Verteilung der Antwortzeit  $W$  und der Wartezeit  $W_Q$  über ihre jeweilige Laplace-Transformierte.

**Aufgabe 2.** Der stochastische Prozess  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  beschreibe ein  $M/D/1$ -System. Die Ankunftsrate sei  $\lambda > 0$  und die (deterministische) Bedienzeit besitze den Wert  $d > 0$ . Es gelte  $\rho := \lambda d < 1$ .

- a) Zeigen Sie, dass im stationären Zustand die mittlere Länge der Warteschlange unmittelbar nach Ende einer Bedienung durch

$$\frac{2 - \rho}{2(1 - \rho)} \rho$$

gegeben ist.

- b) Wie hoch ist die erwartete Verweilzeit im System?

- c) Ermitteln Sie die stationäre Verteilung!

**Hinweise:** Benutzen Sie für die Laplace-Transformierte einer Einpunktverteilung mit Träger  $d \geq 0$  die Darstellung

$$L(s) = e^{-sd}.$$

Ferner gilt

$$e^{-\rho j z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\rho j z)^k}{k!}.$$