9. Übung zu Systemoptimierung in der Kommunikation

Anke Schmeink, Alexander Engels

09.01.2009

Aufgabe 1. (MaxFlow-MinCut-Dualität) In einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E ist für jede Kante $e = (i, j) \in E$ mit $i, j \in V$ eine maximale Kapazität durch die *Kapazitätsfunktion* $c : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert. Die Knotenmenge enthält zwei ausgezeichnete Knoten $q, s \in V$, wobei q als *Quelle* bezeichnet wird und s als *Senke*.

Ein *Fluss in* G ist eine Funktion $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$. Ein q-s-*Fluss* ist ein Fluss in G, bei dem für alle Knoten $v \in V \setminus \{q, s\}$ die *Flusserhaltung* gewährleistet ist, d.h. der Fluss auf den eingehenden Kanten in Summe gleich dem Fluss auf den ausgehenden Kanten ist. Der Wert $w(f)$ eines q-s-Flusses f ist definiert als die Summe des Flusses auf den ausgehenden Kanten der Quelle. Das *MaxFlow-Problem* ist es, einen q-s-Fluss in G mit maximalem Wert zu bestimmen.

i) Formulieren Sie das MaxFlow-Problem als Lineares Programm.

ii) Stellen Sie das zugehörige *duale LP* auf und geben Sie eine geeignete Interpretation der dualen Variablen an.

Hinweis: Wählen Sie als Variablen des LPs die Flüsse $x_{ij} = f\big((i, j)\big) \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ i, j \in V$, und stellen Sie das LP in Vektorschreibweise dar.

Aufgabe 2. (Dualitätslücke und Slater´s Constraint Qualification) Es wird das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & e^{-x} \\ \text{s.d.} & {}^{x^2}\!/_{y} \leq 0 \\ & y > 0 \end{array}$$

mit Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ betrachtet.

i) Verifizieren Sie die Konvexität des Optimierungsproblems und bestimmen Sie den Optimalwert.

ii) Bestimmen Sie den Optimalwert des zugehörigen dualen Problems sowie die resultierende Dualitätslücke.

iii) Entscheiden und begründen Sie, ob *Slater´s Constraint Qualification* erfüllt ist.

Aufgabe 3. (KKT-Bedingungen) Es wird das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & -3{x_1}^2 + {x_2}^2 + 2{x_3}^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{s.d.} \quad & {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1 \end{aligned}$$

mit Variable $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ betrachtet, für das starke Dualität gilt.

i) Stellen Sie die *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* auf.

ii) Bestimmen Sie alle Lösungen, die den KKT-Bedingungen genügen, und identifizieren Sie die optimale Lösung.