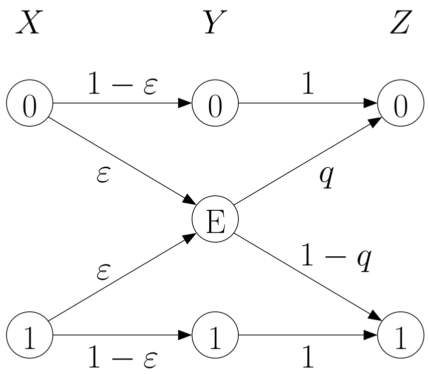
Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

22.8.2014

Aufgabe 1. Gegeben sei die folgende Hintereinanderschaltung von zwei Teilkanälen:



Der erste Teilkanal ist ein binärer *Auslöschungs*kanal mit dem dreielementigen Ausgabealphabet $\mathcal{Y} = \{0, 1, \mathrm{E}\}$, der mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon \in (0, 1)$ statt des übertragenen Symbols $X \in \{0, 1\}$ das Fehlersymbol E ausgibt. Der zweite Teilkanal bildet dieses mit Wahrscheinlichkeit q auf die 0 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$ auf die 1 ab.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe den dualen Logarithmus ($\log_2$).

a) Wie muss der Parameter q für das Zufallsexperiment im zweiten Teilkanal gewählt werden, damit sich insgesamt ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) ergibt?

b) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit δ des BSC sowie die Kanalkapazität $\mathcal{C}_S$ in Abhängigkeit von ε. Wie lautet die kapazitätserreichende Eingabeverteilung?

Im Folgenden betrachten wir eine gedächtnislose Quelle S, die Symbole aus dem Quellalphabet $\mathcal{S} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$ mit den folgenden Häufigkeiten $p_j = \mathrm{P}(S = s_j)$ produziert:

s_j	A	B	C	D
p_j	50 %	25 %	12.5 %	12.5 %

c) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode g für die angegebene Eingabeverteilung, und geben Sie die mittlere Kodewortlänge $\overline{n}(g)$ an.

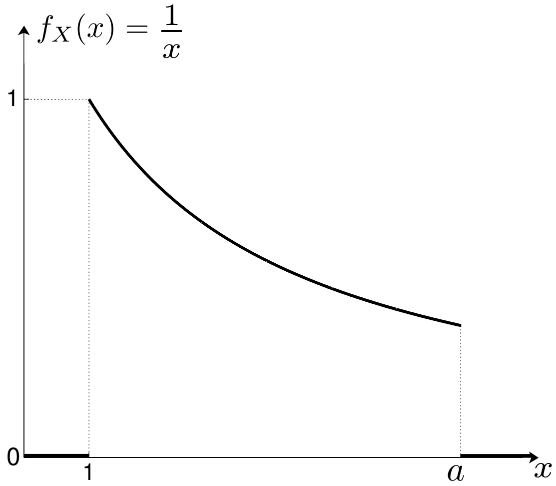
d) Vergleichen Sie $\overline{n}(g)$ mit der Entropie $\mathrm{H}(S)$, und erklären Sie das Ergebnis. Kann man die mittlere Kodewortlänge pro Buchstabe verringern, indem man einen Huffman-Kode für längere Symbolblöcke konstruiert?

Die kodierten Symbole werden jetzt über den zuvor konstruierten BSC übertragen. Die Fehlerwahrscheinlichkeit habe dabei den Wert $\varepsilon = 0.1$.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gemäß der obigen Verteilung zufällig ausgewähltes Quellsymbol fehlerfrei über den BSC übertragen wird?

f) Ein zufällig gewähltes Symbol wurde fehlerfrei übertragen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um das Symbol A?

Aufgabe 2. In mathematischen Programmen wie MATLAB ist es oft nicht möglich, Zufallszahlen mit beliebigen Verteilungen erzeugen zu lassen, sondern es steht nur eine R$(0, 1)$-Verteilung (Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$) zur Verfügung. Für einen bestimmten Anwendungsfall benötigen wir aber nun Stichproben einer Zufallsvariablen X mit der Dichte $f_X(x) = \frac{1}{x}\,\mathbb{I}_{(1,a)}(x)$.



a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

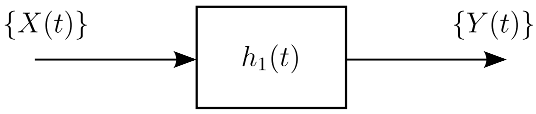
c) Betrachten Sie die Transformation $Y = T(X)$ mit $T : (1, a) \to (b, c)$, $T(X) = \ln(X)$. Bestimmen Sie b und c sowie die Dichte $f_Y(y)$ von Y.

d) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable Y? Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

e) Erläutern Sie, wie Stichproben der Zufallsvariablen X in MATLAB erzeugt werden können.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein LTI-System mit schwach stationärem Eingangsprozess $\{X(t)\}$. Für $t_0 > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ sei die Impulsantwort des Systems gegeben durch

$$h_1(t) = \delta(t) + \delta(t - t_0)\,.$$



Hinweis: Die Fouriertransformierte einer Impulsantwort $h(t)$ wird mit $H(f)$ bezeichnet. Sie ist definiert als $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i f t}\,\mathrm{d}t$.

a) Berechnen Sie $H_1(f)$.

b) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(f)$ vom Ausgangsprozess $\{Y(t)\}$ in Abhängigkeit von $S_{XX}(f)$ an.

c) Es sei $X(t)$ weißes Rauschen mit $R_{XX}(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$.

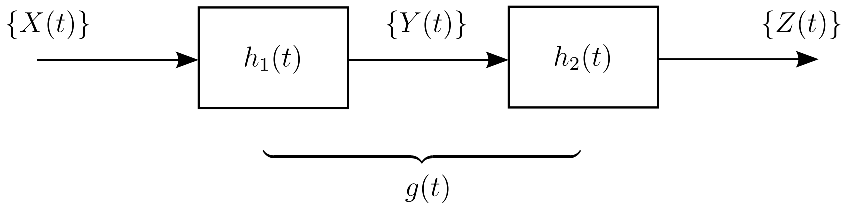
Berechnen Sie $S_{XX}(f)$ und $S_{YY}(f)$.

d) Für $\phi \sim \mathrm{R}(0,1)$ sei $X(t) = \sin(2\pi(t + \phi))$. Berechnen Sie $Y(t)$.

Es sei nun $\phi = 0$. Skizzieren Sie die Realisierung von $Y(t)$ für $t_0 = \frac{1}{2}$ und für $t_0 = 1$.

e) Dem obigen LTI-System wird ein zweites LTI-System nachgeschaltet. Das zweite System hat die Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

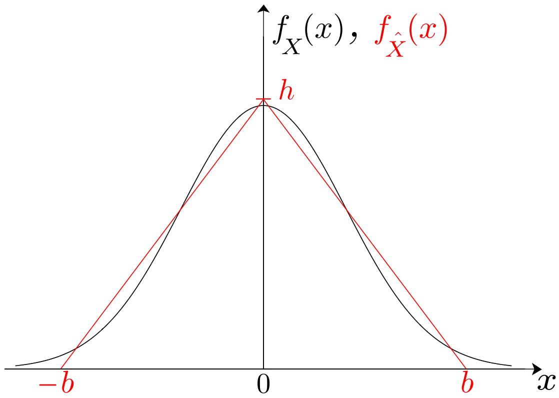


Es bezeichne $g(t)$ die Gesamtimpulsantwort beider Systeme. Berechnen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(f)$.

Aufgabe 4. Für $\sigma > 0$ sei die normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ gegeben. Zur Vereinfachung möchte man ihre Dichte f_X durch die folgende Funktion annähern:

$$f_{\hat{X}}(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|x|}{b}\right), & -b \leq x \leq b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei hängt $f_{\hat{X}}$ von den Parametern $b > 0$ und $h > 0$ ab.



a) Bestimmen Sie den Wert von h in Abhängigkeit des Parameters b so, dass es sich bei $f_{\hat{X}}$ um die Dichte einer Zufallsvariablen $\hat{X}$ handelt.

b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(\hat{X})$ und $\mathrm{Var}(\hat{X})$. Wie muss b gewählt werden, damit $\mathrm{E}(\hat{X}) = \mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(\hat{X}) = \mathrm{Var}(X)$ gilt?

c) Durch numerische Verfahren lässt sich bestimmen, dass

$$P(-\sqrt{1.5}\,\sigma \leq X \leq \sqrt{1.5}\,\sigma) \approx 77{,}93\%$$

gilt. Nutzen Sie die Zufallsvariable $\hat{X}$, um eine Annäherung der obigen Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Verwenden Sie dazu die Parameter aus **b)**.

Über die dreidimensionale Zufallsvariable $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ ist bekannt, dass ihre Dichte folgende Form hat:

$$f_{\mathbf{Z}}(a, b, c) = \frac{1}{d\sqrt{3\pi^3}} \exp\left(-\frac{1}{12}\left(2a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2ab - 18c + 27\right)\right).$$

d) Berechnen Sie $\boldsymbol{C}^{-1}$ und $\boldsymbol{\mu}$.

e) Berechnen Sie d.