Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Chunhui Liu

25.2.2009, 14:00 Uhr, WSH 24 A 407

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Sensor, der eine binäre Entscheidung über die Anwesenheit bzw. die Abwesenheit eines Ereignisses treffen soll. Das Ereignis trete mit der Wahrscheinlichkeit p ein. Der Sensor sei so ausgelegt, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit p_m das Eintreten des Ereignisses verpasst. Zudem bestehe die Wahrscheinlichkeit p_f für einen Falschalarm. Die vom Sensor getroffene binäre Entscheidung werde dann über einen binären symmetrischen Kanal mit einer Kanalfehlerwahrscheinlichkeit ε übertragen.

(a) Bestimmen Sie die effektiven Fehlerwahrscheinlichkeiten $\widetilde{p}_m$ und $\widetilde{p}_f$, die am Ausgang des Kanals beobachtet werden, in Abhängigkeit von ε und p_m bzw. p_f.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_e liegt am Ausgang des Kanals eine falsche Entscheidung vor in Abhängigkeit von p, $\widetilde{p}_m$ und $\widetilde{p}_f$?

(c) Am Ausgang liege eine falsche Entscheidung vor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fand das Ereignis statt in Abhängigkeit von p, $\widetilde{p}_m$ und $\widetilde{p}_f$?

Aufgabe 2. Geben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{x}, & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie μ so, dass $f(x)$ die Voraussetzungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.

Sei X nun eine absolut-stetige Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte aus (a).

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

(d) Die absolut-stetige Zufallsvariable Y sei gegeben durch $Y = \ln X$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y.

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$.

Aufgabe 3. Gegeben seien die zwei diskreten Verteilungen $\boldsymbol{p} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ und $\boldsymbol{q} = (\frac{1}{3}, t, \frac{2}{3} - t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$.

(a) Sei $t = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Kullback-Leibler Distanz $D(\boldsymbol{p} \| \boldsymbol{q})$ bzgl. $\log_2$.

(b) Sei $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$. Bestimmen Sie t so, dass $D(\boldsymbol{p} \| \boldsymbol{q})$ minimal wird.

(c) Für welche diskrete Verteilung $\boldsymbol{r}$ ist $D(\boldsymbol{r} \| \boldsymbol{p})$ minimal und für welche maximal? (ohne Beweis)

Hinweis:
Es ist $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Aufgabe 4. Gegeben seien die drei diskreten Zufallsvariablen X, Y, Z mit jeweils endlichem Träger und der gemeinsamen Zähldichte

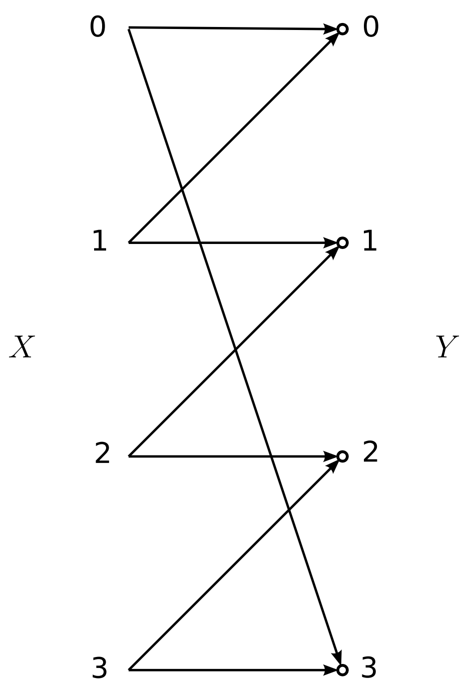
$$f(x, y, z) = f_1(y|x, z) f_2(x) f_3(z).$$

Es gelte zusätzlich $f(x, y, z) > 0$ für alle x, y, z.

(a) Zeigen Sie: X und Z sind stochastisch unabhängig.

(b) Zeigen Sie nun: $I(X, Y|Z) \geq I(X, Y)$

Aufgabe 5. Gegeben sei der folgende Kanal:



Jeder der eingezeichneten Übergänge habe die Übergangswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

(a) Wie groß ist $H(Y)$ maximal (bzgl. $\log_2$)?

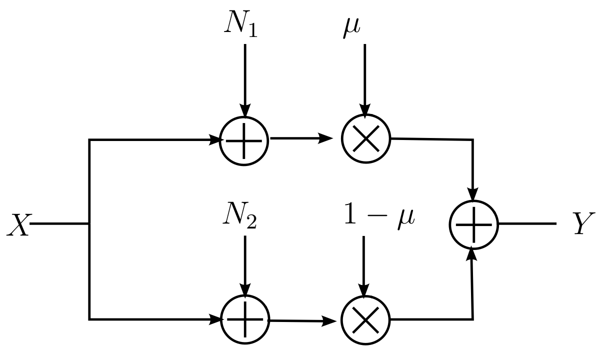
(b) Berechnen Sie $H(Y|X)$.

(c) Geben Sie drei verschiedene Eingangsverteilungen von X an, für welche $H(Y)$ den Wert aus (a) annimmt.

(d) Wie groß ist die Kapazität des Kanals?

Hinweis:
Es ist $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Aufgabe 6. Gegeben sei der folgende Kanal:



Das Eingangssignal X unterliege der Leistungsbeschränkung $E(X^2) \leq 4$ und habe den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0,2)$. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig. Für den Parameter μ gelte $0 \leq \mu \leq 1$. Die Zufallsvariable Y repräsentiert das Ausgangssignal.

(a) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

(b) Der Parameter μ liege wieder im Intervall $[0,1]$. Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit von μ.

(c) Für welchen Wert von μ ist die Kapazität maximal?

(d) Wie groß ist die maximale Kapazität des Kanals?

Aufgabe 7. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung für das Eingangssignal betrage $L = 2$. Die additive Störung sei gegeben durch $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{0}, 40 \cdot \boldsymbol{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei gegeben durch

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1 & 0 & \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

(b) Geben Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ an, für welche die Eingabe $\boldsymbol{X} = \mathrm{SCN}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q})$ die Kapazität des Kanals erreicht.

(c) Betrachten Sie einen MIMO-Kanal mit der 1×1-Kanalmatrix $H = 1$. Die additive Störung sei gegeben durch $Z \sim \mathrm{SCN}(0, \sigma^2)$. Wie hoch darf bei gleicher Leistungsbeschränkung $L = 2$ die Störleistung σ^2 sein, so dass dieser Kanal die gleiche Kapazität besitzt wie der Kanal aus (a)?

Aufgabe 8. Für das Chip-Design eines Algorithmus, der mindestens 24 Mb Daten pro Zeiteinheit verarbeiten soll, stehen zwei Schaltungsblöcke zur Verfügung, die gegeneinander austauschbar sind. Block A, der eine Chipfläche von 6 mm^2 einnimmt, kann in einer Zeiteinheit 6 Mb Daten verarbeiten, während Block B eine Chipfläche von 3 mm^2 besitzt und in einer Zeiteinheit 2 Mb Daten verarbeiten kann. Für den Algorithmus werden mindestens 3 Blöcke vom Typ A und 3 Blöcke vom Typ B benötigt. Um den Ausschuss von Chips in der Fertigung gering zu halten, darf die Gesamtfläche eines Chips nicht größer als 30 mm^2 sein. Die Kosten für einen Block vom Typ A betragen 10 Euro und ein Block vom Typ B kostet 2,50 Euro. Das Ziel des Herstellers ist es, die Anzahl der Blöcke vom Typ A und die Anzahl der Blöcke vom Typ B bei Einhaltung der technischen Randbedingungen so zu wählen, dass die Chipkosten minimiert werden.

(a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem in kanonischer Form.

(b) Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.

(c) Wie hoch sind im Optimalfall die Kosten für einen Chip?