11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Prof. Dr. Anke Schmeink, Andreas Bollig, Christoph Schmitz, Milan Zivkovic

27.01.2012

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X, welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie die maximale Entropie $H(X)$ bezüglich der Symbolwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3.

Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatorregel, d.h. maximieren Sie für $\lambda \in \mathbb{R}_-$ die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = H(X) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1\Big).$$

Aufgabe 2. Die diskreten Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien identisch verteilt aber nicht notwendigerweise unabhängig. Ferner sei

$$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\rho = \frac{I(X_1,X_2)}{H(X_1)}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $0 \le \rho \le 1$ gilt.

c) In welchem Fall gilt $\rho = 0$?

Aufgabe 3.

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$, eine Abbildung. Zeigen Sie

$$H(g(X)) \le H(X).$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 4. Ein PF-Kode g^* mit den Wortlängen $n_1^*, \ldots, n_m^*$ heißt *optimal*, wenn

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \bar{n}(g)$$

für alle PF-Kodes g mit Wortlängen $n_1, \ldots, n_m$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass für einen optimalen Kode g^* folgendes gilt:

$$p_i > p_j \Rightarrow n_i^* \leq n_j^*.$$

Ein Algorithmus zur Konstruktion optimaler PF-Kodes ist das *Huffman-Verfahren*. In diesem Verfahren wird ein Binärbaum erzeugt, wobei die Blätter mit den Quellbuchstaben belegt werden. Der Weg von der Wurzel zu den Blättern legt das Kodewort für den Buchstaben fest, das heißt „links" entspricht einer Null und „rechts" einer Eins im Kodewort. Die Konstruktionsvorschrifr lautet folgendermaßen.

1. Liste die Symbole des Quellalphabets mit fallenden Wahrscheinlichkeiten auf und interpretiere die Symbole im Folgenden als Bäume.
2. Fasse die Bäume mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten zu einem neuen Baum zusammen, d.h. an einen Knoten wird links bzw. rechts jeweils einer dieser Bäume gehangen und der Knoten (der neue Baum) wird mit der Summe der Wahrscheinlichkeiten markiert. Die ursprünglichen Bäume werden aus der Liste entfernt und der resultierende Baum wird gemäß seiner Wahrscheinlichkeit in die bisherige Liste einsortiert.
3. Wiederhole 2. bis nur noch ein Binärbaum übrig ist. Dieser repräsentiert den Huffmann-Code.

b) Bestimmen Sie für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_8\}$ mit $p = (0.25, 0.2, 0.15, 0.15, 0.12, 0.05, 0.04, 0.04)$ und $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ einen optimalen PF-Kode.

c) Berechnen Sie die erwartete Kodewortlänge des Kodes und vergleichen Sie diese mit $H(X)$.