Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Fabian Altenbach, Christoph Schmitz

14.03.2013

TI I: Aufgabe 1-4
TI II: Aufgabe 5-8

Aufgabe 1. Wir betrachten eine Anordnung von $i = 1, 2, \ldots, 12$ Bewegungssensoren. Es sei $P(X_i = 1) = p$ die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Sensor eine Bewegung detektiert, die stochastisch unabhängig von den anderen Sensoren geschieht.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass von 12 Sensoren mindestens 10 eine Bewegung detektieren?

b) Wir betrachten nun die Zufallsvariable $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Benennen Sie die zugehörige Zähldichte und geben Sie diese in geschlossener Form an.

c) Das Detektionsergebnis der Sensoren wird zur Auswertung in zwei verschiedene Stufen eingeteilt:

i) Schlafmodus (S): Weniger als 15% der Sensoren detektieren eine Bewegung.

ii) Alarmmodus (A): Mehr als 80% der Sensoren detektieren eine Bewegung.

Geben sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S)$ und $P(A)$ in Abhängigkeit von p an.

d) Um schnell auf eine mögliche Bewegung zu reagieren, wird ein weiterer Modus eingeführt, der sogenannte Frühwarnmodus (F). Dieser Modus ist aktiv, wenn mindestens zwei und höchstens neun Sensoren eine Bewegung detektieren. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(F)$ in möglichst einfacher Form an.

Aufgabe 2. Die Verteilung eines zweidimensional normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ besitze folgende Dichte:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{20}} \exp\left(\frac{1}{10}(-2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 10x_2 - 10)\right).$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ des Zufallsvektors $\mathbf{X}$.

b) Geben Sie die Dichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an.

c) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig (Begründung)?

Aufgabe 3.

a) Gegeben sei eine Funktion $h(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $H(f)$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte $G(f)$ der Funktion $g(t) = h(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

$$G(f) = H(f) \exp(-i\, 2\pi f t_0)$$

gilt.

b) Gegeben sei ein zeitkontinuierliches LTI-System mit reeller Impulsantwort $h(t)$, Eingabesignal $X(t)$ und Ausgangssignal $Y(t) = (h * X)(t)$. Der stochastische Prozess $\{X(t)\}$ sei schwach stationär. Zeigen Sie, dass dann für die Kreuzkorrelationsfunktion

$$R_{XY}(t) = h^*(-t) * R_{XX}(t)$$

gilt.

Die Impulsantwort $h(t)$ eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems sei gegeben durch

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 \leq t \leq 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

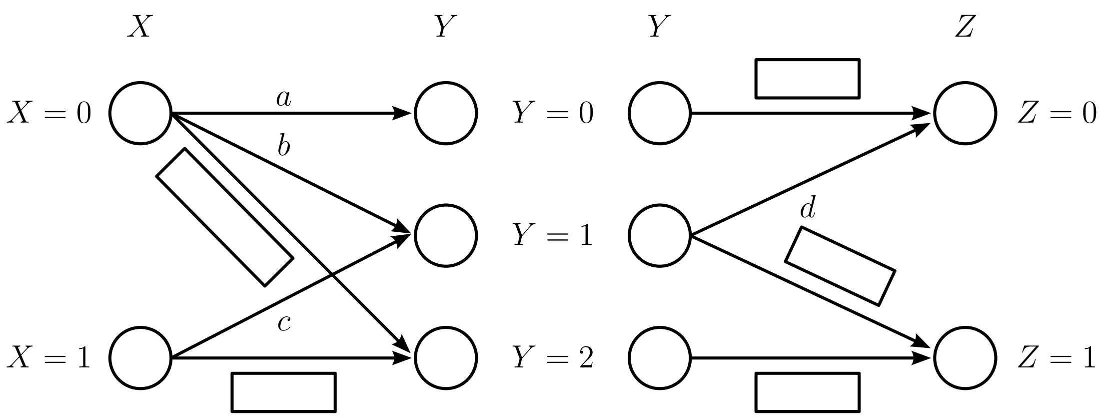
c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $H(f)$.

Beim Eingangsprozess handele es sich um weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit Autokorrelationsfunktion $R_{WW}(t) = 2\delta(t)$. Der Ausgangsprozess sei $N(t) = (h * W)(t)$.

d) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{NN}(t)$ des gefilterten Prozesses $\{N(t)\}$ in möglichst einfacher Form an.

e) Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{WN}(t)$.

Aufgabe 4. Gegeben sei folgender zweistufiger, gedächtnisloser Kanal mit Übergangswahrscheinlichkeiten $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. Es gelte weiterhin $a + b \leq 1$ und $P(X = 0) = p$.



a) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in den dafür vorgesehenen Kästen in der Abbildung.

b) Stellen Sie den oben abgebildeten Kanal als einen äquivalenten binären Kanal $X \to \bar{Z}$ dar, wobei $P(\bar{Z} = 0|X = 0) = r$ und $P(\bar{Z} = 1|X = 1) = s$. Bestimmen Sie r und s als Funktionen von a, b, c, d.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{H}(\bar{Z})$ und $\mathrm{H}(\bar{Z}|X)$ für den äquivalenten Kanal als Funktionen von r, s und p.

d) Welche Bedingungen müssen gelten, damit der äquivalente Kanal ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) wird? Berechnen Sie für diesen Fall b und d, wenn $a = 0.7$, $c = 0.4$ und $s = 0.9$.

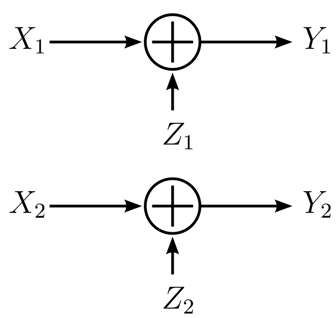
e) Es seien nun $r = 0.9$ und $p = 0.2$ und der äquivalente Kanal ein BSC. Berechnen Sie die Transinformation $\mathrm{I}(X; \bar{Z})$ für diesen Fall. Verwenden Sie den Logarithmus zur Basis 2.

f) Wie lautet die kapazitätserreichende Eingangsverteilung $(p^\star, 1-p^\star)$, wenn der äquivalente Kanal ein BSC ist und $r = 0.9$ gilt? Berechnen Sie die Kapazität für diesen Fall. Verwenden Sie den Logarithmus zur Basis 2.

Aufgabe 5. Die Gesamtaufgabe besteht aus zwei Teilen, die **unabhängig** voneinander lösbar sind.

Teil I

Gegeben sei der unten abgebildete Kanal. Dabei seien Z_1, Z_2 stochastisch unabhängig und die Eingangssignale X_1, X_2 von dem Kanalrauschen Z_1, Z_2 stochastisch unabhängig. Z_1, Z_2 seien mittelwertfrei normalverteilt mit Varianzen $\sigma_1^2 = 4$ bzw. $\sigma_2^2 = 13$. Für die Eingangssignale bestehe jeweils eine Leistungsbeschränkung von $L = 12$.



a) Bestimmen Sie die Kapazität des Gesamtkanals bzgl. des natürlichen Logarithmus.

Nun seien Z_1, Z_2 **nicht mehr** stochastisch unabhängig, sondern korreliert mit $\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2) = \rho$.

b) Stellen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_Z}$ der gemeinsamen Normalverteilung von $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)'$ auf.

c) Nun sei $\rho = \frac{6}{\sqrt{52}}$. Berechnen Sie die Kapazität des neuen Kanals mit Eingabe $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ und einer Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \leq 12$ bzgl. des natürlichen Logarithmus.

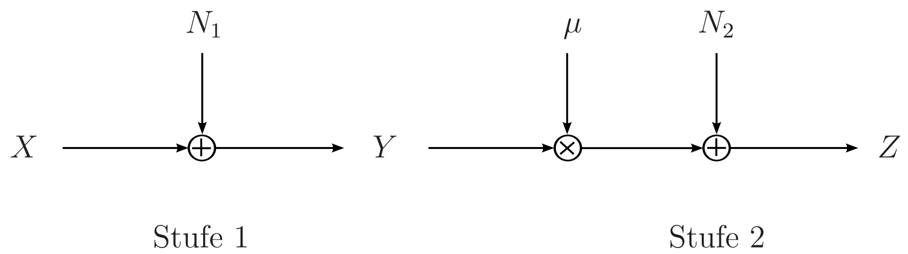
d) Wie muss die Kanaleingabe $\mathbf{X}$ verteilt sein, damit die Kapazität erreicht wird?

Teil II

e) Zeigen oder widerlegen Sie anhand der Exponentialverteilung folgende Aussage: Die Kullback-Leibler-Distanz ist symmetrisch bzgl. ihrer Argumente, d.h. es gilt $D(f||g) = D(g||f)$.

Hinweis: $\int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}$.

Aufgabe 6. Gegeben sei der folgende zweistufige Kanal:



Das Eingangssignal X der ersten Stufe unterliege der Leistungsbeschränkung $E(X^2) \leq L$ und habe den Erwartungswert $E(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Das Eingangssignal der zweiten Stufe ist das Ausgangssignal der ersten Stufe multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor $\mu > 0$. Das Ausgangssignal der zweiten Stufe ist Z. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie die Kapazität $C_{X,Y}$ der ersten Stufe in Abhängigkeit von σ_1 und L an.

b) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die maximale Transinformation $I_{\max}(Y, Z)$ zwischen Y und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2 und L.

c) Sei μ wieder beliebig aber größer als Null. Berechnen Sie die Kapazität $C_{X,Z}$ des gesamten Kanals, also die maximale Transinformation zwischen X und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2, L und μ.

Aufgabe 7. Betrachten Sie den komplexen MIMO-Kanal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$ mit Eingabe $\boldsymbol{X}$, fester Kanalmatrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

und von der Eingabe stochastisch unabhängigem Rauschterm $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}\left(\mathbf{0}, 6 \cdot \boldsymbol{I}_2\right)$. Für die Eingabe gelte eine Leistungsbeschränkung von $L = 3$. Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Berechnen Sie die Kapazität des MIMO-Kanals.

c) Finden Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ derjenigen Eingabeverteilung $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$, mit der die Kanalkapazität erreicht wird.

d) Die Leistungsbeschränkung wird jetzt auf $L = 1$ reduziert. Wie groß ist nun die Kanalkapazität, und mit welcher Eingabeverteilung wird sie erreicht?

Aufgabe 8. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq \frac{3}{2} \\ & x_1 \in [0, 3]\,,\ x_2 \in [0, \infty)\,. \end{array}$$

Zeichnen Sie die zulässige Menge. Geben Sie danach den optimalen Wert und die optimale Menge für folgende Zielfunktionen an:

a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

b) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$