

12. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

16.01.2014

Aufgabe 1. Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ und der Verteilung

$$P(X = x_i) = p_i, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Dann gilt für die Entropie $H(X)$ die Ungleichung

$$0 \leq H(X) \leq \log m,$$

wobei Gleichheit in der linken Ungleichung genau dann gilt, wenn X einpunktverteilt ist, und Gleichheit rechts genau dann, wenn X auf \mathcal{X} gleichverteilt ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Nachrichtenquelle X , welche die diskreten Symbole x_1, x_2, x_3 mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 sendet. Bestimmen Sie die maximale Entropie $H(X)$ bezüglich der Symbolwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 .

Hinweis: Benutzen Sie die Lagrange-Multiplikatorregel, d.h. maximieren Sie für $\lambda \in \mathbb{R}_-$ die Funktion

$$F(p_1, p_2, p_3) = H(X) + \lambda \left(\sum_{i=1}^3 p_i - 1 \right).$$

Aufgabe 3. Die diskreten Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien identisch verteilt aber nicht notwendigerweise unabhängig. Ferner sei

$$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

- Zeigen Sie, dass $\rho = \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)}$ gilt.
- Zeigen Sie, dass $0 \leq \rho \leq 1$ gilt.
- In welchem Fall gilt $\rho = 0$?