

## 13. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

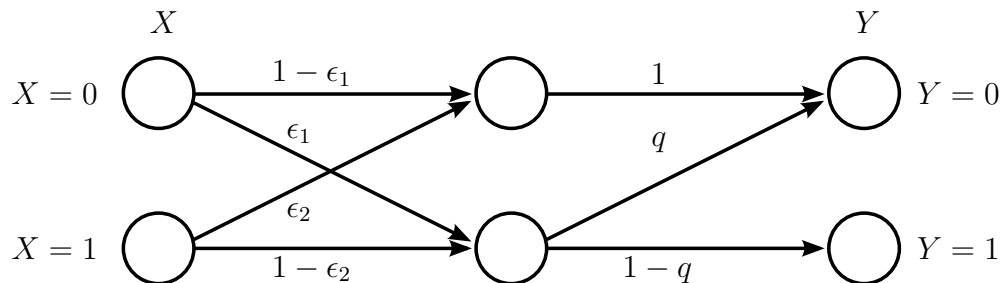
Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

06.02.2015

**Aufgabe 1.** Es seien  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$  ein Quellalphabet,  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_d\}$  ein Kodealphabet und  $g : \mathcal{X} \rightarrow \cup_{l=1}^{\infty} \mathcal{Y}^l$  ein eindeutig dekodierbarer Code. Für  $j = 1, \dots, m$  bezeichne  $P(X = x_j) = p_j$  die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens  $x_j$  und  $n_j$  bezeichne die Länge des Kodeworts  $g(x_j)$ . Zeigen Sie, dass für die erwartete Kodewortlänge  $\bar{n}(g)$  gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \Leftrightarrow p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \dots, m \text{ mit } p_j > 0.$$

**Aufgabe 2.** Gegeben sei folgender binärer Kanal:



Die Parameter  $\epsilon_1, \epsilon_2$  und  $q$  liegen jeweils im Intervall  $[0, 0.5]$  und es gelte ferner  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ .

- Bestimmen Sie  $q$  so, dass der Gesamtkanal symmetrisch ist.
- Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des binären symmetrischen Kanals, der zum Gesamtkanal aus **a)** äquivalent ist, in Abhängigkeit von  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ .
- Berechnen Sie die Transinformation  $I(X; Y)$  des binären symmetrischen Kanals aus **b)**. Nehmen Sie dazu an, dass die Symbole am Kanaleingang gleichwahrscheinlich auftreten und die Fehlerwahrscheinlichkeiten  $\epsilon_1 = 0.02$  und  $\epsilon_2 = 0.01$  betragen.

**Aufgabe 3.** Gegeben seien ein binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$  und Fehlerwahrscheinlichkeit  $\epsilon = 0.1$ . Zur Übertragung wird ein  $(M, N)$ -Kode mit  $M$  Kodewörtern der Länge  $N$  angewendet.

- a) Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals.
- b) Gibt es eine Folge von  $(2^{0.6N}, N)$ -Kodes,  $N \in \mathbb{N}$ , welche die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt?
- c) Die Quelle übermittle  $R$  Symbole pro Zeiteinheit und habe  $2^K$  Kodeworte der Länge  $N$ . Geben Sie eine Bedingung für  $N$  (in Abhängigkeit von  $R$  und  $K$ ) an, so dass die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt wird.