Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 6

Montag, 30. November 2015

Aufgabe 1. Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_1}{X_2}$ Cauchy-verteilt ist mit $\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1-r^2}$, $\mu = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, wobei $r := \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$, $\sigma_{12} := \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Bemerkung: Eine Zufallsvariable X heißt Cauchy-verteilt, wenn

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \; \lambda > 0, \; \mu \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 2.4.4 der Vorlesung zur Berechnung der Dichte von (X_1, X_2) und wenden Sie Theorem 2.4.12 an. Sie können voraussetzen, dass $x_2 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 2. Die Friis-Gleichung für Freiraumausbreitung von elektromagnetischen Wellen lautet in vereinfachter Form

$$P_r(d) = P_t \cdot \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi d)^2} > 0\,, \tag{1}$$

wobei P_t und $P_r(d)$ die Leistung am Sender bzw. Empfänger modellieren. Die weiteren Größen, insbesondere die Distanz d zwischen Sender und Empfänger, werden im Folgenden als konstant angenommen. Am Sender wird die Leistung gemäß $P_t = U^2/R$ durch einen Generator erzeugt, wobei U eine reelle Spannung und R ein konstanter ohmscher Widerstand sind. Durch technische Ungenauigkeiten unterliegt diese Spannung zufälligen Schwankungen. Die Spannung U wird zunächst als Realisierung einer mittelwertfreien, normalverteilten Zufallsvariablen $U \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ angenommen.

a) Formulieren Sie die Transformation $P_r = T(U) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Welche Voraussetzung des Transformationssatzes für Dichten ist verletzt?

In der Vorlesung wurde der Transformationssatz für Dichten eingeführt. Für eine invertierbare Abbildung $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und eine reelle Zufallsvariable X ist die transformierte Dichte der Zufallsvariablen $Y = T(X)$ gegeben durch

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}T^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right| . \tag{2}$$

Eine Voraussetzung des Satzes ist demnach die Injektivität von T. Eine Erweiterung des Transformationssatzes für den Fall einer nicht injektiven Abbildung T kann folgendermaßen beschrieben werden. Sei $I_1, \dots, I_K$ eine Partition von $\mathbb{R}$, so dass die Abbildungen $T_k : I_k \to \mathbb{R}$ mit $T_k(x) = T(x)$, $x \in I_k$, jeweils injektiv und stetig differenzierbar sind. Dann lässt sich zeigen, dass für die transformierte Dichte

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{K} f_X(T_k^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}T_k^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right| \tag{3}$$

folgt.

b) Finden Sie eine geeignete Partition von $\mathbb{R}$, so dass die Voraussetzung für die Erweiterung des Transformationssatzes für $P_r = T(U)$ erfüllt sind. Berechnen Sie die transformierte Dichte $f_{P_r}(p_r)$. Zeigen Sie weiterhin, dass es sich bei dem gefundenen Ausdruck tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie der Normalverteilung.

c) Die Dichte einer Gamma-verteilten Zufallsvariablen Z lautet

$$f_Z(z) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\gamma z}\, , \; z \geq 0, \gamma > 0, \tag{4}$$

wobei $\Gamma(\alpha)$ die sogenannte Gamma-Funktion ist. Einige charakteristische Werte dieser Funktion sind in folgender Tabelle gegeben.

α	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$
$\Gamma(\alpha)$	$4/3\sqrt{\pi}$	$-2\sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	$1/2\sqrt{\pi}$

Zeigen Sie, dass die Dichte $f_{P_r}(p_r)$ einer Gamma-Dichte entspricht.

d) Für die Generatorspannung U wurde bisher Mittelwertfreiheit angenommen. Im Folgenden soll $U \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gelten, wobei μ als eine Art Sollspannung verstanden werden kann. Wie lautet jetzt die Dichte $f_{P_r}(p_r)$?