# 12. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

08.07.2014

**Aufgabe 1.** Gegeben sei das unten dargestellte MIMO-System. Das eingangsseitige Datensymbol $x$ soll ausgangsseitig möglichst gut durch $\hat{x}$ rekonstruiert werden. Ziel der Aufgabe ist es, hierfür die optimalen, linearen Sende- und Empfangsvektoren $\mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{a}$ zu bestimmen.

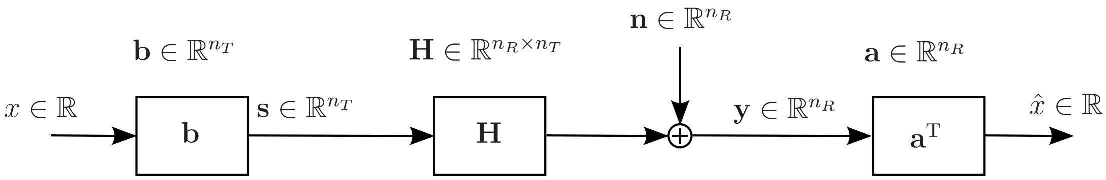


Figure 1: MIMO-System

Für die gesamte Aufgabe werden folgende Annahmen gemacht: Es gibt keine Unterscheidung bezüglich der Groß- und Kleinschreibung der Zufallsgrößen $x$ und $\mathbf{n}$ und deren Realisierung. Das mittelwertfreie Datensymbol ist normiert auf $\mathrm{E}[x^2] = 1$. Für die additive Störung gilt $\mathbf{n} \sim N_{n_R}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_n})$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei fest und bei Sender und Empfänger bekannt.

**a)** Geben Sie $\hat{x}$ in Abhängigkeit vom Eingangssymbol $x$ und dem Störterm $\mathbf{n}$ an.

**b)** Das Sendesymbol $\mathbf{s}$ unterliege einer Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}[\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}] \leq P_T$. Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung ausschließlich in Abhängigkeit vom Sendevektor $\mathbf{b}$ formuliert werden kann.

Zur Rekonstruktion von $\hat{x}$ soll der mittlere quadratische Fehler (mean square error)

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \mathrm{E}[(x - \hat{x})^2] \\ &= \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Sigma_n})\mathbf{a} + 1 - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{b} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

bezüglich des Sendevektors $\mathbf{b}$ und des Empfangsvektors $\mathbf{a}$ minimiert werden. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet für diesen Fall

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{a},\mathbf{b}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}^T) \leq P_T\,.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieses Problem durch hierarchische Optimierung getrennt gelöst werden kann. Es soll daher zuerst ein optimaler Empfangsvektor $\mathbf{a}^*$ als Lösung von

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{minimize}} \quad \mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

bestimmt werden.

**c)** Bestimmen Sie einen optimalen Empfangsvektor $\mathbf{a}^*$, der $\mathrm{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ minimiert. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Vektor $\mathbf{b}$ fest ist. Sie können weiterhin die beiden folgenden Beziehungen ohne Beweis benutzen

$$\frac{\partial \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{D} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}})\mathbf{x}\,.$$

**d)** Zeigen Sie, dass obiges Optimierungsproblem ein konvexes Optimierungsproblem ist. Verwenden Sie hierfür die folgendene Beziehung zwischen einer konvexen Funktion $f$ und ihrer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) \text{ ist konvex} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\,.$$

**e)** Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}\right)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}\frac{1}{1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}$$

die Gültigkeit von

$$\mathrm{MSE}(\mathbf{b}) := \mathrm{MSE}(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) = \frac{1}{1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}\,.$$

Im Folgenden soll ein optimaler Sendevektor $\mathbf{b}^*$ bestimmt werden. Hierfür ist das verbleibende Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{b}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{MSE}(\mathbf{b}) \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}) \leq P_T \end{aligned}$$

zu lösen. Aus der Matrix-Analysis ist das sogenannte Rayleigh-Ritz-Theorem bekannt. Dieses besagt, dass für eine hermitesche Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \quad \underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x} = 1\,, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ der maximale Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ ist.

**f)** Finden Sie unter Berücksichtigung des Rayleigh-Ritz-Theorems einen optimalen Sendevektor $\mathbf{b}^*$. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Leistungsbeschränkung mit Gleichheit erfüllt wird.

**g)** Erklären Sie das Ergebnis aus **f)**.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 2.** Gegeben seien $n$ parallele Kanäle. Die Datenrate auf jedem Kanal wird bestimmt durch die Funktion $f(p_i) = \log(1+p_i g_i)$, wobei $p_i$ zu verteilende Leistungen und $g_i$ bekannte Pfadgewinne sind.

Es soll nun eine optimale Leistungszuweisung auf allen Kanälen erfolgen, so dass die gewichtete Summenrate maximiert wird. Für diesen Zweck wird das folgende Optimierungsproblem betrachtet

$$\begin{array}{ll} \underset{p_i}{\text{minimize}} & -\sum_{i=1}^{n} w_i \log(1+p_i g_i) \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n} p_i \leq P_T \\ & p_i \geq 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \end{array}$$

wobei $w_i \geq 0$ Gewichtsfaktoren sind. Lösen sie das obige Optimierungsproblem mittels der KKT-Bedingungen. Um welche Art von Lösung handelt es sich?