2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

22.04.2015

Aufgabe 1. Die folgenden Beziehungen gelten für die Entropie von diskreten Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass sie für die differentielle Entropie nicht gelten, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

a) $\mathrm{H}(X) \geq 0$,

b) $\mathrm{H}(T(X)) \leq \mathrm{H}(X)$,

c) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X,Y)$,

d) $\mathrm{H}(X+Y) \leq \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$.

Hinweise:
Zu a) und b): Für $X \sim \mathrm{R}(0,1)$ und $a > 0$ gilt $aX \sim \mathrm{R}(0,a)$.
Zu c) und d): Für X, Y s.u. gilt $\mathrm{H}(X,Y) = \mathrm{H}(X) + \mathrm{H}(Y)$. Wählen Sie für ein Gegenbeispiel X und Y so, dass $\mathrm{H}(X+Y)$ einfach zu bestimmen ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie $\mathrm{I}(X;Y)$, $\mathrm{H}(X|Y)$, und $\mathrm{H}(Y|X)$ für

$$(X,Y)' \sim \mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine BPSK-Modulation mit Amplituden $\mu > 0$ und die Symbole seien gleichverteilt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird entweder μ oder $-\mu$ gesendet. Das Signal X werde bei der Übertragung von additivem, gleichverteilten Rauschen auf dem Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ gestört, also gilt $Y = X + N$ mit $N \sim \mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und X und N seien stochastisch unabhängig.

a) Geben Sie die Dichte f_Y an.

b) Berechen Sie die differentielle Entropie von f_Y.

c) Zeichnen Sie die differentielle Entropie von f_Y als Funktion von μ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 4.

a) Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA}).$$

b) Es sei $\boldsymbol{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{X})) = \operatorname{tr}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X})).$$