

4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

06.05.2015

Aufgabe 1.

In dieser Aufgabe werden wichtige Grundlagen zur Diagonalisierung von Matrizen behandelt bzw. wiederholt.

- a) Eine komplexwertige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ gilt. Zeigen Sie, dass sämtliche Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reell sind. Gilt dies auch für reelle symmetrische Matrizen?
- b) Eine komplexwertige quadratische Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär, wenn $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$ gilt. Jede hermitesche Matrix \mathbf{A} ist unitär diagonalisierbar, d.h. es existiert eine unitäre Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ mit den Eigenwerten von \mathbf{A} ist.

Zeigen Sie nun die Gültigkeit von

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Aufgabe 2. Für die Datenübertragung von einem Server zu einem Clientrechner stehen drei parallele Leitungen zur Verfügung. Da die Leitungen in einem Kabelkanal verlegt sind, ist das normalverteilte additive Rauschen \mathbf{Z} auf den Leitungen korreliert und besitzt die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 23 & -1 & -10 \\ -1 & 23 & -10 \\ -10 & -10 & 32 \end{pmatrix}.$$

Der Server kann mit einer maximalen Sendeleistung L senden, wobei die Leistung beliebig auf die Leitungen verteilt werden kann.

Hinweis: Die Eigenwerte von $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$ sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 7$.

- a) Wie groß ist die Kapazität des aus den drei Leitungen bestehenden Kanals für die konkreten Werte $L = 6$ und $L = 8$?
- b) Für welche Inputverteilungen werden die Kapazitäten aus a) angenommen?

c) Betrachten Sie die Leitungen nun als drei unabhängige reelle Gaußkanäle mit Leistungsbeschränkung $L' = 2$ auf jeder Leitung. Wie groß ist die Gesamtkapazität für den Fall, dass

- die Korrelationen zwischen den Kanälen vernachlässigt werden, bzw.
- die Rauschleistungen durch die Eigenwerte der Kovarianzmatrix gegeben sind.

Aufgabe 3. Im WLAN-Standard (802.11g) stehen dem Benutzer 27,83 MHz Übertragungsbandbreite pro Kanal zur Verfügung. Laut Standard kann ab einem SNR von 50 dB am Empfänger die maximale Bruttoübertragungsrate von 54 Mbit/s erzielt werden.

Bestimmen Sie im Vergleich dazu die maximale theoretische Übertragungsrate über einen bandbegrenzten Gaußkanal bei gleichem SNR.