5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

13.05.2015

Aufgabe 1. Im WLAN-Standard (802.11g) stehen dem Benutzer 20 MHz Übertragungsbandbreite pro Kanal zur Verfügung. Laut Standard kann ab einem SNR von 50 dB am Empfänger die maximale Bruttoübertragungsrate von 54 Mbit/s erzielt werden.

Bestimmen Sie im Vergleich dazu die maximale theoretische Übertragungsrate über einen bandbegrenzten Gaußkanal bei gleichem SNR.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein reeller paralleler Gauß-Kanal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} .$$

Das Eingangssignal $\boldsymbol{X}$ unterliege der Leistungsbeschränkung $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{X}}) \leq L$. Für die Kovarianzmatrix des normalverteilten, mittelwertfreien Störterms $\boldsymbol{Z}$ gelte weiterhin

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und erklären Sie das Ergebnis.

b) Es soll auf der Empfangsseite des Kanals ein Vektor $\boldsymbol{b}$ derart konstruiert werden, so dass die Komponente X_1 fehlerfrei übertragen wird. Finden Sie hierfür eine geeignete lineare Transformation

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}) \,, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Warum ist eine fehlerfreie Übertragung möglich?

Hinweis: Berechnen Sie $\boldsymbol{b}$ so, dass die Varianz von $W = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{Z}$ gleich Null ist.

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard-Ungleichung

$$|\boldsymbol{A}| \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \le \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie sowie die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1})\,.$$