Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Prof. Dr. Anke Schmeink, Andreas Bollig, Christoph Schmitz, Milan Zivkovic

12.03.2012

TI I: Aufgabe 1-4
TI II: Aufgabe 5-8

Aufgabe 1. Gegeben sei eine „Multi-Hop-Übertragung", bei der Daten von der Quelle zur Senke über $n-1$ Zwischenstationen übertragen werden. Alle Übertragungskanäle seien binär symmetrisch und weisen identische Fehlerwahrscheinlichkeiten $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ auf.

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass der resultierende Gesamtkanal ein binärer symmetrischer Kanal ist, der folgende Fehlerwahrscheinlichkeit ε_n besitzt:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}(1 - (1 - 2\varepsilon)^n) \tag{1}$$

Hinweis: Dazu sind folgende Beweisschritte notwendig:

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Reihenschaltung zweier binärer symmetrischer Kanäle (BSCs) mit unterschiedlichen Fehlerwahrscheinlichkeiten wieder einem BSC entspricht.

b) Zeigen Sie dann, dass für eine Multi-Hop-Übertragung mit einer Zwischenstation (1) gilt (Induktionsanfang).

c) Zeigen Sie schließlich, dass aus der Gültigkeit von (1) für n die Gültigkeit von (1) für $n + 1$ folgt (Induktionsschluss).

b) Bestimmen Sie die Kapazität des resultierenden Gesamtkanals, der aus vier Zwischenstationen besteht, wobei die binären symmetrischen Kanäle eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\varepsilon = 0.1$ aufweisen (bzgl. $\log_2$).

c) Nun wird ein Gesamtkanal mit nur einer Zwischenstation betrachtet. Berechnen Sie in Abhängigkeit von ε die Wahrscheinlichkeit, dass eine fehlerfreie Bitübertragung zu der Zwischenstation vorlag, wenn wir wissen, dass das Bit fehlerfrei von der Senke empfangen wurde?

Aufgabe 2. Eine absolut-stetige Zufallsvariable X mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sei gegeben.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1-(x-1)^2\right) & \text{für } b \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie b so, dass $f_X(x)$ die Voraussetzungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

d) Bestimmen Sie die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Gegeben sei nun eine weitere Zufallsvariable $Y = T(X) = (X-1)^2$, die somit eine Funktion der Zufallsvariablen X ist.

e) Teilen Sie den Definitionsbereich von $f_X(x)$ so in Teilintervalle auf, dass $T(x)$ auf jedem dieser Intervalle injektiv ist. Wie lauten die Intervallgrenzen?

f) Bestimmen Sie für jedes dieser Teilintervalle jeweils die Umkehrfunktion $T^{-1}(y)$.

g) Bestimmen Sie nun unter der Zuhilfenahme der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen e) und f) die Verteilungsdichtefunktion $f_Y(y)$.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine diskrete gedächtnislose Quelle X mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$. Die Symbolwahrscheinlichkeiten seien $P(X = A) = 0.7$, $P(X = B) = 0.2$, $P(X = C) = 0.1$.

a) Berechnen Sie die Entropie der Quelle X bzgl. $\log_2$.

b) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für Einzelsymbole und berechnen Sie seine mittlere Kodewortlänge.

c) Kodieren Sie mit dem Huffman-Kode aus b) die Nachricht „CCAB".

d) Durch einen Fehler werde das erste Bit der kodierten Nachricht aus c) verfälscht. Welche Nachricht wird in diesem Fall dekodiert?

e) Bestimmen Sie die Entropie der Quelle für Symbolpaare (Blöcke aus 2 Symbolen) bzgl. $\log_2$.

f) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für Symbolpaare und berechnen Sie seine mittlere Kodewortlänge je Symbol.

g) Gegeben sei ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0.2$. Die Quelle X soll nun über diesen Kanal übertragen werden. Wieviele Kanalnutzungen des BSC dürfen im Mittel pro Symbol nicht unterschritten werden, um eine asymptotisch fehlerfreie Übertragung zu ermöglichen? Hierbei wird eine optimale Quellen- und Kanalkodierung angenommen.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Fadingkanal mit dem Ausgangssignal

$$Y = H \cdot X.$$

Hier repräsentiert H den Kanal und X das Eingangssignal. Der Kanal H und das Eingangssignal X sind stochastisch unabhängig.

Des Weiteren seien sowohl der Kanal H als auch das Eingangssignal X binäre und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils die Werte 0 und 1 annehmen können. Außerdem gelte $P(H = 1) = \frac{1}{2}$. Die Kanalrealisierung H ist dem Empfänger nicht bekannt.

a) Berechnen Sie die Kapazität (in bit/Kanalnutzung) und die kapazitätserreichende Eingangsverteilung.

Nun verändert sich das Verhalten des Fadingkanals. Wir nehmen an, das die Kanalrealisierung H immer noch eine binäre Zufallsvariable ist, die jetzt die Werte 1 und -1 annehmen kann. Wie vorher gelte $P(H = 1) = \frac{1}{2}$. Außerdem sei das binäre Eingangsignal jetzt durch die Werte 1 und -1 gegeben.

b) Wie groß ist die Kapazität im Fall, dass H dem Empfänger nicht bekannt sei? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie groß ist die Kapazität im Fall, dass H dem Empfänger bekannt sei? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5. Gegeben sei ein Fading-Kanal mit dem Ausgangssignal

$$Y = H \cdot X + Z.$$

Hier repräsentiert H den Kanal, X das Eingangssignal und Z additives Rauschen. Der Kanal H, das Eingangssignal X und das additive Rauschen Z sind gemeinsam stochastisch unabhängig.

a) Zeigen Sie, dass das Wissen der Kanalrealisierung H die Kapazität vergrößert, indem Sie zeigen, dass folgende Ungleichung gilt:

$$I(Y;X) \leq I(Y;X|H)$$

Nun nehmen wir an, dass die Kanalrealisierung fest den Wert 1 hat, d.h. das Kanalmodell lautet nun

$$Y = X + Z$$

Des Weiteren sei das additive Rauschen Z gleichverteilt auf dem Intervall $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$.

b) Das Eingangssignal X sei gleichverteilt auf dem Intervall $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

   1. Bestimmen und skizzieren Sie die Dichte $f_Y(y)$.
   2. Berechnen Sie die Transinformation $I(Y;X)$ (in bit/Kanalnutzung).

   Hinweis: Die differentielle Entropie einer dreiecksverteilten Zufallsvariable U mit dem Träger $[0, v], v \in (0, \infty)$ und der Dichte

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{4u}{v^2} + \frac{2}{v} & \text{für } -\frac{v}{2} \leq u \leq 0 \\ -\frac{4u}{v^2} + \frac{2}{v} & \text{für } 0 \leq u \leq \frac{v}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   ist gegeben durch

$$H(U) = \frac{1}{2} + \log\left(\frac{v}{2}\right).$$

Nun werden bezüglich der Eingangsverteilung keine einschränkenden Annahmen mehr gemacht, abgesehen davon, dass es eine Begrenzung der Momentanleistung gibt, so dass $-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}$.

c) Bestimmen Sie unter diesen Bedingungen die Kapazität des Kanals (in bit/Kanalnutzung) und geben Sie die kapazitätserreichende Eingangsverteilung an.

   Hinweis: Es gilt folgender **Satz**:
   Sei V eine Zufallsvariable mit dem Träger $[v_1, v_2]$. Die differentielle Entropie $H(V)$ wird durch die Gleichverteilung, d.h. $V \sim R(v_1, v_2)$, maximiert.

d) Beweisen Sie den im Hinweis zu c) angegebenen Satz.

Aufgabe 6. Betrachten Sie den parallelen Gaußkanal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$$

mit der Eingabe $\boldsymbol{X}$ und dem Rauschterm $\boldsymbol{Z}$. Dabei seien $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Z}$ stochastisch unabhängig und es sei $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}\right)$ mit

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0,\ 0 < \rho < 1.$$

Für die Eingabe gelte eine Leistungsbeschränkung von $L > 0$.

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit von σ^2, ρ und L. Wie groß muss die Leistungsbeschränkung L mindestens sein, damit sich der Kanal wie zwei parallele Kanäle verhält, d.h. die Leistungen in beiden Teilkanälen positiv sind?

b) Bestimmen Sie diejenige Verteilung von $\boldsymbol{X}$ in Abhängigkeit von σ^2, ρ und L, für die die Kanalkapazität angenommen wird.

Aufgabe 7. Gegeben sei der MIMO-Kanal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 5$. Für die additive Störung gelte $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0},\ 7\boldsymbol{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ 0 & \sqrt{7} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

c) Geben Sie eine Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ an, so dass für die Eingabe $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

d) Zum Empfang stehe nun nur die dritte Empfangsantenne zur Verfügung. Wie hoch muss die Leistung L sein, um die gleiche Kapazität wie im Aufgabenteil b) zu erzielen?

Aufgabe 8. Wir betrachten die Übertragung von Daten zwischen den drei Städten Hamburg, Frankfurt und Stuttgart. Sowohl zwischen Hamburg und Frankfurt, als auch zwischen Frankfurt und Stuttgart gibt es eine Datenleitung. Für Übertragungen von Hamburg nach Stuttgart werden beide Leitungen genutzt, es gibt also keine direkte Leitung zwischen Hamburg und Stuttgart.

Auf der Datenleitung von Hamburg nach Frankfurt kann maximal eine Datenrate von 20 Mbit/s übertragen werden. Andererseits besitzt die Datenleitung von Frankfurt nach Stuttgart eine Kapazität von 25 Mbit/s.

Eine Marktanalyse hat ergeben, dass aufgrund der Konkurrenzsituation die in der folgenden Tabelle angegebenen Preise für die Datenübertragung zwischen den verschiedenen

Verbindung	Hamburg - Frankfurt	Frankfurt - Stuttgart	Hamburg - Stuttgart
erzielbarer Preis pro Mbit/s in Euro pro Monat	20	18	30
maximale Nachfrage in Mbit/s	16	20	12

Städten erzielt werden können. Des Weiteren hat diese Analyse ergeben, dass die maximale Nachfrage nach Datenübertragungen zwischen den verschiedenen Städten begrenzt ist, siehe ebenfalls folgende Tabelle.

Die Nutzung der Datenleitungen soll nun so optimiert werden, dass der Ertrag des Betreibers maximiert wird.

a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem als lineares Programm.

Nun nehmen wir an, dass die beiden Datenleitungen von zwei verschiedenen Unternehmen betrieben werden. Den Ertrag aus Datenübertragungen zwischen Hamburg und Frankfurt erhält Unternehmen A, den Ertrag aus Datenübertragungen zwischen Frankfurt und Stuttgart erhält Unternehmen B. Den Ertrag aus Datenübertragungen zwischen Hamburg und Stuttgart erhält zur einen Hälfte Unternehmen A und zur anderen Hälfte Unternehmen B.

Zunächst soll die Nutzung der Datenleitungen durch jedes Unternehmen unabhängig optimiert werden, so dass für jedes Unternehmen der Ertrag maximiert wird. Dabei soll angenommen werden, dass der Anteil an Übertragungen zwischen Hamburg und Stuttgart, die beide Unternehmen betreffen, in beiden Optimierungen unabhängig gewählt werden kann.

b) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem für *Unternehmen A* als lineares Programm. Lösen Sie das Optimierungsproblem grafisch. Geben Sie außerdem den maximalen Ertrag an.

c) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem für *Unternehmen B* als lineares Programm. Lösen Sie das Optimierungsproblem grafisch. Geben Sie außerdem den maximalen Ertrag an.

Nun soll wieder das ursprüngliche Optimierungsproblem aus a) betrachtet werden.
Sei $(x_{\text{H-F, A}}, x_{\text{H-S, A}})$ die Lösung des Optimierungsproblems in b) und sei $(x_{\text{F-S, B}}, x_{\text{H-S, B}})$ die Lösung des Optimierungsproblems in c). Hierbei sei $x_{\text{H-F, A}}$ die genutzte Datenrate für die Verbindung zwischen Hamburg und Frankfurt und entsprechend $x_{\text{F-S, B}}$ zwischen Frankfurt und Stuttgart. $x_{\text{H-S, A}}$ und $x_{\text{H-S, B}}$ sind die gefundenen Lösungen für die genutzten Datenraten zwischen Hamburg und Stuttgart, einerseits aus der Optimierung für Unternehmen A in b) und andererseits aus der Optimierung für Unternehmen B in c).

d) Ist $(x_{\text{H-F, A}}, x_{\text{F-S, B}}, \max\{x_{\text{H-S, A}}, x_{\text{H-S, B}}\})$ die Lösung des Optimierungsproblems in a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Ist $(x_{\text{H-F, A}}, x_{\text{F-S, B}}, \min\{x_{\text{H-S, A}}, x_{\text{H-S, B}}\})$ die Lösung des Optimierungsproblems in a)? Begründen Sie Ihre Antwort.