RWTHAACHEN UNIVERSITY
Lehrstuhl für Theoretische Informationstechnik

7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Gernot Fabeck

30.11.2007

Aufgabe 1. Es seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$

(b) $\widehat{\boldsymbol{x}}'\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y})$

(c) $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}^{-1}}$

(d) $\det \widehat{\boldsymbol{A}} = |\det \boldsymbol{A}|^2$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll Proposition 2.6.5 aus dem Skript bewiesen werden.
Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist nicht-negativ definit. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ reell ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaft, dass $\boldsymbol{Q}$ hermitesch ist.

(b) Zeigen Sie dann, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ nicht-negativ ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (a), die Eigenschaften (a) und (b) aus Aufgabe 1 und Proposition 2.6.4 aus dem Skript.

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{X}$ zirkulär symmetrisch komplex verteilt mit Erwartungswert $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \mathbf{0}$.
Anmerkung: Die Matrix $\mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \mathbf{0}$ wird in der Literatur häufig *Pseudo-Kovarianzmatrix* genannt.

(b) Sei X_l der $l$te Eintrag des Vektors $\boldsymbol{X}$. Zeigen Sie: Der Realteil $\mathrm{Re}(X_l)$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(X_l)$ sind unkorreliert.
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus (a).

(c) Sei $\boldsymbol{X}$ weiterhin zirkulär symmetrisch, nehme aber nur reelle Werte an. Wie ist $\boldsymbol{X}$ dann verteilt?