7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Prof. Dr. Anke Schmeink, Andreas Bollig, Christoph Schmitz, Milan Zivkovic

02.12.2011

Aufgabe 1. Es seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ und $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$

b) $\widehat{\boldsymbol{x}}'\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{y})$

c) $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}^{-1}}$

d) $\det \widehat{\boldsymbol{A}} = |\det \boldsymbol{A}|^2$

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll Proposition 2.6.5 aus dem Skript bewiesen werden. Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{Q})$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor. Zeigen Sie: Die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist nicht-negativ definit. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ reell ist. **Hinweis:** Verwenden Sie die Eigenschaft, dass $\boldsymbol{Q}$ hermitesch ist.

b) Zeigen Sie dann, dass für jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ die quadratische Form $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ nicht-negativ ist. **Hinweis:** Verwenden Sie das Ergebnis aus **a)** und die Eigenschaften **a)** und **b)** aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Für komplexe Zufallsvektoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ mit Erwartungswerten $\boldsymbol{\mu}_X$ und $\boldsymbol{\mu}_Y$ lauten die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ bzw. die *Pseudo-Kovarianzmatrix* $\mathrm{PCov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = E((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y)^*) \text{ und}$$
$$\mathrm{PCov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = E((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y)').$$

Seien $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_r + i\boldsymbol{X}_i$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_r + i\boldsymbol{Y}_i$, $\boldsymbol{C} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ und $\boldsymbol{P} = \mathrm{PCov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

a) Zeigen Sie

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_r, \boldsymbol{Y}_r) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{P}),$$
$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{P}),$$
$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_r) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{P}),$$
$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_r, \boldsymbol{Y}_i) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{P}).$$

b) Zeigen Sie die folgende Aussage:
Die Kovarianzen aus **a)** sind genau dann alle $\mathbf{0}$, wenn $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P} = \mathbf{0}$ gilt.

Seien nun U, V zwei stochastisch unabhängige, reelle Zufallsvariablen und $X = U + iV$ bzw. $Y = U - iV$.

c) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

d) Berechnen Sie die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und $\mathrm{PCov}(X, Y)$.

e) Sei nun $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{Var}(V) = \sigma^2$. Wie lauten dann $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und $\mathrm{PCov}(X, Y)$? Interpretieren Sie das Ergebnis unter Berücksichtigung der Teilaufgaben **b)** und **c)**.