5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

14.11.2013

Aufgabe 1. $(X_1, X_2)'$ sei ein absolut-stetiger Zufallsvektor. Für $x_2 > 0$ sei die bedingte Verteilung von X_1 unter $X_2 = x_2$ eine Rechteckverteilung auf $(-x_2, x_2)$. X_2 besitze die Dichte

$$f_{X_2}(x_2) = 2x_2 \mathbb{I}_{(0,1)}(x_2).$$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von $(X_1, X_2)'$.

b) Geben Sie die Dichte von X_1 an.

c) Berechnen Sie $P({X_1}^2 + {X_2}^2 \leq 1)$.

Aufgabe 2.

a) Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, jeweils $N(0, \sigma^2)$-verteilt. Zeigen Sie, dass gilt $X_1^2 + X_2^2 \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichte von X_1^2 und nutzen Sie dann Theorem 2.4.14 der Vorlesung.

b) Bemerkung: Eine Zufallsvariable X heißt Cauchy-verteilt, wenn

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \ \lambda > 0, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$. Zeigen Sie, dass $\frac{X_1}{X_2}$ Cauchy-verteilt ist mit $\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\sqrt{1-r^2}$, $\mu = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, wobei $r := \sigma_{12}^2/(\sigma_1^2\sigma_2^2)$, $\sigma_{12} := \text{Cov}(X_1, X_2)$.

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 2.4.4 der Vorlesung zur Berechnung der Dichte von (X_1, X_2) und wenden Sie Theorem 2.4.12 an. Sie können voraussetzen, dass $x_2 \neq 0$ gilt.