9. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

08.07.2010

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass folgende Mengen konvex sind.

a) $A = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{x} \leq a \right\}, \quad a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

b) $B = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{b}^t \boldsymbol{x} \geq b \right\}, \quad b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

c) $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i, \quad C_i, i \in \mathbb{N}$ konvex

d) $D = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{d}^t \boldsymbol{x} = d \right\}, \quad d \in \mathbb{R}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge der stochastischen Vektoren der Länge n

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \mid p_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

konvex ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Definitionen konvexer, reeller Funktionen.

a) Für alle $x_1, x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$ gilt $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

b) Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt $f(x) \leq \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$.

c) Für alle $x_1 < x < x_2$ gilt $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Sei zusätzlich f zweifach differenzierbar, zeigen Sie dass dann **d)** ebenfalls eine äquivalente Definition darstellt.

d) $f''(x) \geq 0$.

Hinweise:

- Zeigen und benutzen Sie: Ist f konvex, dann gilt für alle $x_1 < x < x_2$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

- Benutzen Sie die Aussage (Mittelwertsatz), dass ein $x \in (x_1, x_2)$ existiert mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x).$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen konvex sind.

a) $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_i), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_+, f_i, i = 1, \ldots, n$ konvex

b) $g(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(1 + b_i p_i), \quad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n_+$

c) $h(x) = \max_{i=1,\ldots,n} f_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, f_i, i = 1, \ldots, n$ konvex