# 10. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

15.07.2010

**Aufgabe 1.** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn gilt

i) $f$ ist nichtnegativ: $f(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

ii) $f$ ist definit: $f(\mathbf{x}) = 0$ nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

iii) $f$ ist homogen: $f(t\mathbf{x}) = |t| f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$

iv) $f$ erfüllt die Dreiecksungleichung: $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Zeigen Sie, dass jede Norm eine konvexe Funktion ist.

**Aufgabe 2.** Die $l_p$-Vektornorm eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, p \geq 1 .$$

Zwei wichtige Spezialfälle sind die $l_1$- und die $l_\infty$-Vektornorm

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

Formulieren Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ als lineare Programme

**a)** $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 \quad \text{subject to } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$

**b)** $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \quad \text{subject to } \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$

**c)** $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_\infty$

**Hinweis:** Das Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}}\, f(\mathbf{x})$$

lässt sich mit $t \in \mathbb{R}$ äquivalent umschreiben zu

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x},t}{\text{minimize}} & t \\ \text{subject to} & f(\mathbf{x}) \leq t\,. \end{array}$$

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3.**

**a)** Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System werde durch die Beziehung

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t} h_i u(t-i)$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{Z}$ ist. Für die weiteren Größen gilt:

- Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = 0$ für $t < 0$
- Ausgangssignal $y(t) \in \mathbb{R}$
- FIR Kanalkoeffizienten $h_i \in \mathbb{R}$ (bekannt) mit $h_i = 0$ für $i > N$

Geben Sie für die Abtastzeitpunkte $0 \leq t \leq N$ die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal in einer kompakten Matrix-Vektorschreibweise an.

**b)** Das Ausgangssignal $y(t)$ soll nun näherungsweise einem vorgegebenen Signal $y_{\text{ziel}}(t)$ folgen können. Hierfür ist die betragsmäßig maximale Abweichung der Differenz $e(t) = y(t) - y_{\text{ziel}}(t)$ für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq N$ möglichst klein zu halten

$$\max_{0 \leq t \leq N} |e(t)| \rightarrow \min .$$

Um dieses Ziel zu erreichen, soll jetzt eine Steuerung für das Eingangssignal $u(t)$ entworfen werden. Dabei sind die folgenden technischen Spezifikationen zu beachten.

- Das Eingangssignal darf nur für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq M$ gesteuert werden. Für Zeitpunkte $M < t \leq N$ muss das Eingangssignal Null sein.
- Die betragsmäßig maximale Amplitude des Eingangssignals darf den Wert $U$ nicht überschreiten.
- Zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $t$ und $t+1$ darf sich die Amplitude des Eingangssignals betragsmäßig nicht mehr als um $S$ ändern.

Formulieren Sie das obige Problem als Optimierungsproblem.

**Hinweis:** Verwenden Sie für die Zielfunktion die kompakte Matrix-Vektorschreibweise aus Aufgabenstellung **a)** und eine entsprechend der Aufgabenstellung passende Vektornorm.

**c)** Transformieren sie das Optimierungsproblem aus **b)** in ein lineares Programm.