Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

01.09.2010

Aufgabe 1. Auf einer Straße verteile sich die Anzahl der Fahrzeuge, welche die zugelassene Höchstgeschwindigkeit überschreiten, folgendermaßen auf die drei Fahrzeugklassen PKW (P), LKW (L) und Motorrad (M):

	PKW	LKW	Motorrad
Anzahl	9720	1620	4860

Bei Messungen mit einem Geschwindigkeitsradar werde mit Wahrscheinlichkeit $p_{D_P} = 0.8$ die Geschwindigkeitsüberschreitung von PKWs, mit Wahrscheinlichkeit $p_{D_L} = 0.9$ die Geschwindigkeitsüberschreitung von LKWs und mit Wahrscheinlichkeit $p_{D_M} = 0.6$ die Geschwindigkeitsüberschreitung von Motorrädern durch das Radar detektiert.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrzeug, das die zugelassene Höchstgeschwindigkeit überschreitet, vom Radar detektiert wird.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Fahrzeug, dessen Geschwindigkeitsübertretung detektiert wurde, ein LKW?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Fahrzeug, dessen Geschwindigkeitsübertretung nicht detektiert wurde, ein PKW?

d) Wie hoch ist der prozentuale Anteil der Motorräder unter den Fahrzeugen, deren Geschwindigkeitsübertretung nicht detektiert wurde?

Aufgabe 2. Die Zufallsvariablen S_1, S_2, S_3 seien stochastisch unabhängig und identisch $\text{Exp}(\lambda)$-verteilt, $\lambda > 0$. Der Zufallsvektor $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ sei definiert durch

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 + S_2 \\ S_2 + S_3 \\ S_1 + S_3 \end{bmatrix} .$$

Berechnen Sie die Dichte von $\mathbf{Y}$.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Fehlerwahrscheinlichkeit des Kanals betrage $\epsilon = 1/3$. Die Menge der Eingabewörter sei $\mathcal{C} = \{(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$. Dabei treten $c_0 = (0,0,0)$ und $c_2 = (1,1,1)$ mit Wahrscheinlichkeit $1/8$ sowie $c_1 = (0,1,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ auf.

a) Wie hoch ist die Entropie der Quelle?

b) Welche Ausgabewörter sind bei der Übertragung im Kanal möglich und wie groß ist die Auftrittswahrscheinlichkeit für die Ausgabe $(0,0,0)$?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_K für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?

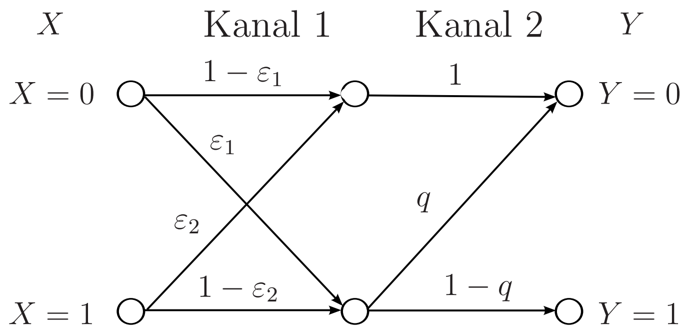
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_E dafür, ein Element aus $\mathcal{C}$ zu empfangen, das nicht gesendet wurde?

e) Geben Sie eine ML-Dekodierung $h_{ML} : \mathcal{Y}^3 \to \mathcal{C}$ an.

f) Bestimmen Sie alle $0 \leq \epsilon < 1/2$, sodass in einer ME-Dekodierung die Ausgabe $(0,0,0)$ eindeutig der Eingabe $(0,0,0)$ zugeordnet wird.

g) Geben Sie abschließend einen Quellkode kürzester erwarteter Länge für die Menge der Eingabewörter $\mathcal{C}$ an. Wie lautet die erwartete Wortlänge des Kodes?

Aufgabe 4. Gegeben ist die Reihenschaltung zweier diskreter, gedächtnisloser Kanäle:



Die Parameter $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und q liegen jeweils im Intervall $[0, 0.5]$ und es gelte ferner $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

a) Bestimmen Sie q so, dass der Gesamtkanal symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des binären symmetrischen Kanals, der zum Gesamtkanal aus **a)** äquivalent ist, in Abhängigkeit von ε_1 und ε_2.

c) Sei nun $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ und $q \in [0, 0, 5]$. Mit der Wahrscheinlichkeit p_0 liege am Kanaleingang eine 0 an und mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1 - p_0$ liege eine 1 an. Bestimmen Sie p_0 und p_1 in Abhängigkeit von q so, dass die Entropie am Kanalausgang maximal wird.

Aufgabe 5. Es seien die Zufallsvariablen X und Y gemeinsam zweidimensional normalverteilt mit $\mathrm{E}(X) = E(Y) = 0$, $\mathrm{E}(X^2) = \sigma_1^2$, $\mathrm{E}(Y^2) = \sigma_2^2$ und $\mathrm{E}(XY) = \rho\sigma_1\sigma_2$ mit $-1 < \rho < 1$. Stellen Sie die Transinformation $I(X, Y)$ als Funktion von ρ dar. Für welche Werte von ρ sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 6. Gegeben sei der parallele Gauß-Kanal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} \sim \mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{E}[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}] \leq 2.$$

Die Kapazität dieses Kanals bestimmt sich zu $C = \log(3)/2$. Der Eingang $\mathbf{X}$ habe im Folgenden die kapazitätserreichende Verteilung

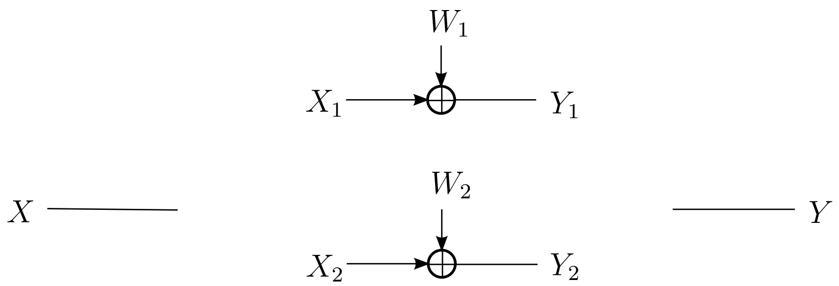
$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Sie sollen nun einen äquivalenten einfachen Gauß-Kanal herleiten. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$, so dass $\mathbf{X} \sim (1, -1)'X$.

b) Zeigen Sie: Für $Y = (1, -1)\mathbf{Y}$ und X aus **a)** gilt $I(X, Y) = \log(3)/2$.

c) Vervollständigen Sie nun das Diagramm:



Aufgabe 7. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 110 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\mathbf{H}$ sei

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Das mittelwertfreie Eingangssignal unterliege einer Leistungsbeschränkung von

$$\mathrm{E}(\mathbf{X}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}) \leq L = 32\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung in Abhängigkeit von der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_X}$ formuliert werden kann.

b) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

c) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_X}$ der Eingabe $\mathbf{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_X})$, für welche die Kapazität des Kanals erreicht wird.

Aufgabe 8. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x_1, x_2) \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq \frac{3}{2} \\ & x_1 \in [0, 3]\,,\ x_2 \in [0, \infty)\,. \end{array}$$

Zeichnen Sie die zulässige Menge. Geben Sie danach den optimalen Wert und die optimale Menge für die beiden folgenden Zielfunktionen an:

a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

b) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Es gilt nun für die Zielfunktion

$$f_0(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} - b_i)^2}\,,$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$ und $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$.

c) Zeigen Sie, dass es sich um ein konvexes Optimierungsproblem handelt.